8). $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n\geq 2$ (1)

Với $n=2$: Vế trái của (1) $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, vế phải của (1) $=\frac{2+1}{2.2}=\frac{3}{4}$. Suy ra (1) đúng với $n=2$.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}$

Thật vậy ta có: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$

$=\frac{k+1}{2k}.\frac{k\left(k+2\right)}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương $n\geq 2$.

9). $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ (1)

Với $n=1$: Vế trái của (1) $=1$, vế phải của (1) $=2\sqrt{1}=2$. Suy ra (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$

Thật vậy: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$ (đúng)

Vì $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}\Leftrightarrow 2\sqrt{k\left(k+1\right)}+1<2\left(k+1\right)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{k^2+k}<2k+1\Leftrightarrow 4\left(k^2+k\right)<\left(2k+1\right)^2$ (đúng).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

10). $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$ (1)

Với $n=1$: Vế trái của (1) $=\frac{1}{2}$, vế phải của (1) $=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$. Suy ra (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{2^k-1}{2^k}$ (2).

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$

Thật vậy: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$

$= \dfrac{2\left(2^k - 1\right)}{2.2^k} + \dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1}} + \dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n = k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

11). $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{27} + \cdots + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4.3^n}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) $= \dfrac{1}{3}$, vế phải của (1) $= \dfrac{3}{4} - \dfrac{2.1+3}{4.3} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n = k$. Có nghĩa là ta có: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{27} + \cdots + \dfrac{k}{3^k} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2k+3}{4.3^k}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{27} + \cdots + \dfrac{k}{3^k} + \dfrac{k+1}{3^{k+1}} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2(k+1)+3}{4.3^{k+1}}$

Thật vậy: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{27} + \cdots + \dfrac{k}{3^k} + \dfrac{k+1}{3^{k+1}} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2k+3}{4.3^k} + \dfrac{k+1}{3^{k+1}}$

$= \dfrac{3}{4} - \dfrac{3(2k+3)}{4.3^{k+1}} + \dfrac{k+1}{3^{k+1}} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3(2k+3) - 4(k+1)}{4.3^{k+1}} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2k+5}{4.3^{k+1}} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2(k+1)+3}{4.3^{k+1}}$ (đúng).

Vậy (1) đúng khi $n = k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 2: Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:
1). $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.
2). $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3
3). $n^3 - n$ chia hết cho 3.
4). $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.
5). $13^n - 1$ chia hết cho 6.
6). $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.
7). $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9.
8). $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5
9). $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.
10). $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.
11). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.
12). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $4.3^{2n+2} + 32n - 36$ chia hết cho 32.
13). $3^{3n+3} - 26n - 27 \vdots 169, \forall n \in \mathbb{N}^*$

LỜI GIẢI

1). $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Với $n = 1$ ta có $1^3 + 11.1 = 12$ chia hết cho 6 đúng.

Giả sử với $n = k$ thì $k^3 + 11k$ chia hết cho 6.

Ta phải chứng minh với $n = k+1$ thì $\left(k+1\right)^3 + 11\left(k+1\right)$ chia hết cho 6.

Thật vậy ta có $\left(k+1\right)^3 + 11\left(k+1\right) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12$ $\left(*\right)$

Ta có $k^3 + 11k$ chia hết cho 6 theo bước 2, $3k(k+1)$ chia hết cho 6 và 12 hiển nhiên chia hết cho 6. Từ đó suy ra $\left(*\right)$ chia hết cho 6 (đpcm).

2). $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3

Đặt $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$

Ta có $u_1 = 1^3 + 3.1^2 + 5.1 = 9$ chia hết cho 3.

Giả sử $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ chia hết cho 3.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$ chia hết cho 3.

Thật vậy, ta có $u_{k+1} = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 = u_k + 3(k^2 + 3k + 3)$. Vì u_k và $3(k^2 + 3k + 3)$ đều chia hết cho 3, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 3.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 3.

3). $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Đặt $u_n = n^3 - n$

Ta có $u_1 = 1^3 - 1 = 0$ chia hết cho 3 (đúng).

Giả sử $u_k = k^3 - k$ chia hết cho 3.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$ chia hết cho 3.

Thật vậy, ta có $u_{k+1} = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = u_k + 3(k^2 + k)$. Vì u_k và $3(k^2 + k)$ đều chia hết cho 3, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 3.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 3.

4). $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

Đặt $u_n = 2n^3 - 3n^2 + n$

Ta có $u_1 = 2.1^3 - 3.1^2 + 1 = 0$ chia hết cho 6 (đúng).

Giả sử $u_k = 2k^3 - 3k^2 + k$ chia hết cho 6.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + k + 1$ chia hết cho 6.

Thật vậy, khai triển rút gọn ta được $u_{k+1} = 2k^3 - 3k^2 + k + 6k^2 = u_k + 6k^2$. Vì u_k và $6k^2$ đều chia hết cho 6, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 6.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 6.

5). $13^n - 1$ chia hết cho 6.

Đặt $u_n = 13^n - 1$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 13^1 - 1 = 12$ chia hết cho 6 (đúng).

Giả sử $u_k = 13^k - 1$ chia hết cho 6.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 13^{k+1} - 1$ chia hết cho 6.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 13.13^k - 1 = 13(13^k - 1) + 12 = 12u_k + 12$. Vì $12u_k$ và 12 đều chia hết cho 6, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 6.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 6.