

$$6) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d + u_1 + 4d = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10d = 20 \Rightarrow u_1 = 4 - 2d \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 4d)^2 = 170 \quad (2) \end{cases}$$

Thay:  $u_1 = 4 - 2d$  vào (2) được:

$$(4 - 2d)^2 + (4 - 2d + d)^2 + (4 - 2d + 2d)^2 + (4 - 2d + 3d)^2 + (4 - 2d + 4d)^2 = 170$$

$$\Leftrightarrow (4 - 2d)^2 + (4 - d)^2 + 4^2 + (4 + d)^2 + (4 + 2d)^2 = 170$$

$$\Leftrightarrow 80 + 10d^2 = 170 \Leftrightarrow d^2 = 9 \Leftrightarrow d = \pm 3.$$

Với  $d = 3 \Rightarrow u_1 = 4 - 6 = -2$ . Với  $d = -3 \Rightarrow u_1 = 4 + 6 = 10$ .

$$7) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = -12 \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 - d \quad (1) \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d) = 8 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được:  $(-4 - d)(-4 - d + d)(-4 - d + 2d) = 8 \Leftrightarrow (4 + d)(d - 4) = 2$

$$\Leftrightarrow d^2 - 16 = 2 \Leftrightarrow d^2 = 18 \Leftrightarrow d = \pm 3\sqrt{2}$$

Với  $d = 3\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = -4 - 3\sqrt{2}$ . Với  $d = -3\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = -4 + 3\sqrt{2}$ .

$$8) \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d = \frac{5}{3} \\ (u_1 + 2d)(u_1 + 3d) = \frac{65}{72} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{6} - 2d \\ \left(\frac{5}{6} - 2d + 2d\right)\left(\frac{5}{6} - 2d + 3d\right) = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{6} - 2d \\ \frac{5}{6} + d = \frac{13}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{4} \end{cases}$$

**Câu 3:** Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ  $n$  của các cấp số cộng sau, biết rằng:

$$a) \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases} \quad b) \begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases} \quad c) \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \quad d) \begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases}$$

### LỜI GIẢI

$$a) \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12(2u_1 + 11d)}{2} = 34 \\ \frac{18(2u_1 + 17d)}{2} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u_1 + 33d = 17 \\ 2u_1 + 17d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{32}{9} \\ d = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$u_n = u_1 + (n-1)d = \frac{32}{9} - \frac{1}{9}n$$

$$b) \begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ \frac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ 2u_1 + 9d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 86 \\ d = -19 \end{cases}$$

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 105 - 19n$$

$$c). \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} \\ \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20(2u_1 + 19d)}{10} = \frac{10(2u_1 + 9d)}{6} \\ \frac{10(2u_1 + 9d)}{6} = \frac{5(2u_1 + 4d)}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 55d = 0 \\ 2u_1 + 24d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow u_n = 0$$

$$d). \begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20(2u_1 + 19d) = 20(2u_1 + 9d) \\ 15(2u_1 + 14d) = 15(2u_1 + 4d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ u_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 \in \mathbb{R}$$

**Câu 4:** Cho cấp số cộng:  $u_1; u_2; u_3; \dots$  có công sai  $d$ .

1). Biết  $u_2 + u_{22} = 40$ . Tính  $S_{23}$

2). Biết  $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$ . Tính  $u_6 + u_{11} \vee u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$

4). Biết  $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$ . Tính:  $S_{19}$

5). Biết  $u_{23} + u_{57} = 29$ . Tính:  $u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$

#### LỜI GIẢI

1). Biết  $u_2 + u_{22} = 40$ . Tính  $S_{23}$

Ta có:  $u_2 + u_{22} = 40 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 21d = 40 \Leftrightarrow 2u_1 + 22d = 40$

Mà  $S_{23} = \frac{23}{2}(2u_1 + 22d) = \frac{23}{2} \cdot 40 = 460$ .

2). Biết  $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$ . Tính  $u_6 + u_{11} \vee u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$

Có:  $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$ .

$\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 3d + u_1 + 6d + u_1 + 9d + u_1 + 12d + u_1 + 15d = 147$ .

$\Leftrightarrow 6u_1 + 45d = 147 \Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 49$ .

Ta có:  $u_6 + u_{11} = u_1 + 5d + u_1 + 10d = 2u_1 + 15d = 49$ .

Ta có:  $u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} = u_1 + u_1 + 5d + u_1 + 10d + u_1 + 15d$

$= 4u_1 + 30d = 2(2u_1 + 15d) = 2 \cdot 49 = 98$ .

4). Biết  $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$ . Tính:  $S_{19}$

Có:  $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$

$\Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 15d = 224 \Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224 \Leftrightarrow u_1 + 9d = 56$

Ta có:  $S_{19} = \frac{19}{2}(2u_1 + 18d) = 19(u_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = 1064$ .

5). Biết  $u_{23} + u_{57} = 29$ . Tính:  $u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$

Ta có:  $u_{23} + u_{57} = 29 \Leftrightarrow u_1 + 22d + u_1 + 56d = 29 \Leftrightarrow 2u_1 + 78d = 29$ .

Ta có:  $3u_1 + u_{10} + u_{70} + u_{157} = 3u_1 + u_1 + 9d + u_1 + 69d + u_1 + 156d$

$= 6u_1 + 234d = 3(2u_1 + 78d) = 3 \cdot 29 = 87$

**Câu 5:** Tìm 3 số hạng liên tiếp của 1 cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

#### LỜI GIẢI

Gọi 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng:  $u_1; u_2; u_3$ . Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 & (1) \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 293 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 27 \Leftrightarrow 3u_1 + 3d = 27 \Leftrightarrow d = 9 - u_1.$$

$$(2) \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 293$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + (u_1 + 18 - 2u_1)^2 = 293 \Leftrightarrow u_1^2 + 81 + (18 - u_1)^2 = 293$$

$$\Leftrightarrow 2u_1^2 - 36u_1 - 112 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 14 \vee u_1 = 4$$

$$\text{Với } u_1 = 14 \Rightarrow d = -5 \Rightarrow u_2 = 9; u_3 = 4.$$

$$\text{Với } u_1 = 4 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow u_2 = 9; u_3 = 14.$$

Ta có thể gọi 3 số hạng liên tiếp của CSC là  $u_1 = u - d, u_2 = u, u_3 = u + d$  với công sai  $d$

**Câu 6:** Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng bằng 20 và tích của chúng là 384.

### LỜI GIẢI

Gọi 4 số hạng của cấp số cộng cần tìm là  $u_1, u_2, u_3, u_4$  có công sai  $d$ .

$$\text{Theo đề bài ta có: } \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 & (1) \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 = 384 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 20$$

$$\Leftrightarrow 4u_1 + 6d = 20 \Rightarrow u_1 = \frac{20 - 6d}{4} = 5 - \frac{3}{2}d.$$

$$(2) \Leftrightarrow u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d) = 384.$$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{3}{2}d\right) \left(5 - \frac{3}{2}d + d\right) \left(5 - \frac{3}{2}d + 2d\right) \left(5 - \frac{3}{2}d + 3d\right) = 384$$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{3}{2}d\right) \left(5 + \frac{3}{2}d\right) \left(5 - \frac{d}{2}\right) \left(5 + \frac{d}{2}\right) = 384 \Leftrightarrow \left(25 - \frac{9d^2}{4}\right) \left(25 - \frac{d^2}{4}\right) = 384.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{d^2}{4}, t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (25 - 9t)(25 - t) = 384 \Leftrightarrow 9t^2 - 250t + 241 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{241}{9} \vee t_2 = 1.$$

Cách 2: gọi  $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$

$$\text{Ta có: } u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \Leftrightarrow 4u = 20 \Rightarrow u = 5.$$

$$\text{Và: } u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 = 384. \Leftrightarrow (u - 3d)(u - d)(u + d)(u + 3d) = 384$$

$$\Leftrightarrow (u^2 - 9d^2)(u^2 - d^2) = 384 \Leftrightarrow (25 - 9d^2)(25 - d^2) = 384.$$

$$\text{Đặt: } t = d^2, t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 250t + 241 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{241}{9}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1.$$

$$\bullet d = 1 \Rightarrow u_1 = 2; u_2 = 4; u_3 = 6; u_4 = 8$$

$$\bullet d = -1 \Rightarrow u_1 = 8; u_2 = 6; u_3 = 4; u_4 = 2$$

$$\text{Với: } t = \frac{241}{9} \Rightarrow d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3}$$

$$\bullet d = \frac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \sqrt{241}; u_2 = 5 - \sqrt{241}; u_3 = 5 + \frac{\sqrt{241}}{3}; u_4 = 5 + \sqrt{241}$$

$$\bullet d = -\frac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \sqrt{241}; u_2 = 5 + \frac{\sqrt{241}}{3}; u_3 = 5 - \frac{\sqrt{241}}{3}; u_4 = 5 - \sqrt{241}.$$

Ta có thể gọi 4 số hạng liên tiếp của CSC là  $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$  với công sai  $2d$ .

hoc360.net