

3.24: Tìm a, b, c biết rằng: a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời $a + b + c = 30$.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} a + c = 2b & (1) \\ a \cdot b = c^2 & (2) \\ a + b + c = 30 & (3) \end{cases}$$

Thay(1) vào (3) được $3b = 30 \Rightarrow b = 10$

thay $b = 10$ vào (1) và (2):
$$\begin{cases} a + c = 20 \\ 10a = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c^2}{10} + c = 20 \\ a = \frac{c^2}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + 10c + 200 = 0 \\ a = \frac{c^2}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 10 \Rightarrow a = 10 \text{ (loại)} \\ c = -20 \Rightarrow a = 40 \end{cases}$$

Kết luận: $a = 40; b = 10; c = -20$.

4) Ba số dương a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân và đồng thời

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

LỜI GIẢI

Theo đề:
$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{4} \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a + a \cdot q + a \cdot q^2 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{a \cdot q} + \frac{1}{a \cdot q^2} = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1 + q + q^2) = 7 \quad (*) \\ \frac{q^2 + q + 1}{a \cdot q^2} = \frac{7}{4} \quad (**) \end{cases}$$

Lấy $\frac{(*)}{(**)}$ được: $a^2 \cdot q^2 = 4 \Leftrightarrow (a \cdot q)^2 = 2^2 \Rightarrow a \cdot q = \pm 2$.

Với $a \cdot q = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{q}$ thay vào (*) được:

$$\frac{2}{q}(1 + q + q^2) = 7 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

• $q = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2; c = 4$ • $q = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4; b = 2; c = 1$.

Với $a \cdot q = -2 \Rightarrow a$ và q trái dấu.

Nếu $q < 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow b = a \cdot q < 0$ (loại)

Vì a, b, c phải là 3 số dương.

Nếu $q > 0 \Rightarrow a < 0$ (loại)

5) a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời $a \cdot b \cdot c = 125$.

LỜI GIẢI

• a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng, nên có: $a + c = 2b$.

• b, c, a là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên có: $b.a = c^2$.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a + c = 2b & (1) \\ b.a = c^2 & (2) \\ a.b.c = 125 & (3) \end{cases}$$

Thay (2) vào (3) được: $c^3 = 125 \Rightarrow c = 5$

Thay $c = 5$ vào (1) và (2):

$$\begin{cases} a + 5 = 2b \\ a.b = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ (2b - 5)b = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ 2b^2 - 5b - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \Rightarrow a = 5 \\ b = -\frac{5}{2} \Rightarrow a = -10. \end{cases}$$

Vậy: $a = b = c = 5$ hoặc $a = -10; b = -\frac{5}{2}; c = 5$.