II. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ có đồ thị d.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: ax^4 + bx^2 + c = k \quad (1)$

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$ ta có phương trình $at^2 + bt + c - k = 0 \quad (2)$

- (C) và d có bốn giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) thỏa $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$. *(Trường hợp này thường gặp)*
- (C) và d có ba giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm $t = 0$.
- (C) và d có hai giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.
- (C) và d không có giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.
- (C) và d có một giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có một nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t = 0$ và một nghiệm âm.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm giao điểm của đồ thị $(C): y = x^4 + 2x^2 - 3$ và trục hoành.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$.

Vậy có hai giao điểm: $A(-1;0)$, $B(1;0)$.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Phương trình: $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 3 = m \quad (1)$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^4 - 2x^2 + 3$ và đường thẳng $d: y = m$. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của (C) và d.

Khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x;\ y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 < m < 3$. Vậy $2 < m < 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 3m - 2\ (C_m)$. Định m để đồ thị (C_m) cắt đường thẳng $d: y = -2$ tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d:

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 3m - 2 = -2 \Leftrightarrow x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 3m = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = x^2\ (t \geq 0)$, phương trình trở thành

$$t^2 - 2(m+1)t + m^2 - 3m = 0\ (2).$$

(C_m) và d có bốn giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m+1>0 \\ m^2-3m>0 \\ 2(m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{5} \\ m<0, m>3 \\ m>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{5} < m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right. .$$

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{5};0\right) \cup (3;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ (C). Tìm *m* để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ đều nhỏ hơn 2.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: y=-1$ là

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0.$$

Đặt $t = x^2$ $(t \ge 0)$, ta có phương trình

$$t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3m+1 \end{array}\right.$$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3m+1 \end{array}\right.$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \ne 0$.

Vậy $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \ne 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ có đồ thị là (C_m). Tìm *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0 \qquad (1)$

Đặt $t = x^2$ $(t \ge 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - (3m+4)t + m^2 = 0 \qquad (2)$

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ P = m^2 > 0 \\ S = 3m + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \vee m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \\ m > -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $0 < t_1 < t_2$. Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt là $x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$. Bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \ (3)$$

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 4 & (4) \\ t_1 t_2 = m^2 & (5) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta suy ra được $\begin{cases} t_1 = \dfrac{3m+4}{10} \\ t_2 = \dfrac{9(3m+4)}{10} \end{cases} (6).$

Thay (6) vào (5) ta được $\dfrac{9}{100}(3m+4)^2 = m^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m+4) = 10m \\ 3(3m+4) = -10m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = -\dfrac{12}{19} \end{array}\right. \text{(thỏa (*))}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 12;\ m = -\dfrac{12}{19}$.

III. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = kx + n$ có đồ thị d. Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = kx + n \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2 + Bx + C = 0 & (1) \\ x \neq -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

(C) và d có hai giao điểm $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị (C): $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $d: y=x+2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{2x-1}=x+2 \qquad (1)$

Điều kiện: $x\neq\dfrac{1}{2}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2x+1=(2x-1)(x+2)\Leftrightarrow 2x^2+x-3=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\\ x=1\Rightarrow y=3\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;3)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x-1}=-x+m \qquad (1)$

Điều kiện: $x\neq 1$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2x-1=(-x+m)(x-1)$

$$\Leftrightarrow x^2-(m-1)x+m-1=0 \qquad (2)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=[-(m-1)]^2-4(m-1)>0\\ 1-(m-1).1+m-1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2-6m+5>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+2}$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để đường thẳng $d: y=2x-1$ cắt đồ thị (C_m) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho $AB=\sqrt{10}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{mx-1}{x+2}=2x-1 \qquad (1)$

Điều kiện: $x \neq -2$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow mx-1=(2x-1)(x+2) \Leftrightarrow 2x^2-(m-3)x-1=0 \quad (2)$$

d cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=\left[-(m-3)\right]^2+8>0 \\ 8+2m-6-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq -\frac{1}{2}$$

(*)

Đặt $A(x_1;2x_1-1);\ B(x_2;2x_2-1)$ với $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m-3}{2} \\ x_1x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$, khi đó

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow 5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m-3}{2}\right)^2+2=2 \Leftrightarrow m=3 \qquad \text{(thỏa (*))}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=3$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=-2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho tam giác OAB có diện tích là $\sqrt{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{2x+1}{x+1}=-2x+m \Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(-2x+m) \text{ (điều kiện: } x\neq -1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+(4-m)x+1-m=0 \quad (1) \text{ (điều kiện: } x\neq -1\text{).}$$

d cắt (C) tại hai điểm $A,\ B$ phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 8 > 0 \quad \forall m \\ 2.(-1)^2 + (4-m)(-1) + 1 - m \neq 0 \end{cases}.$$

Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm $A,\ B$ phân biệt với mọi m.

Gọi $A(x_1; y_1);\ B(x_2; y_2)$, trong đó $y_1 = -2x_1 + m;\ y_2 = -2x_2 + m$ và $x_1,\ x_2$ là các nghiệm của (1). Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m-4}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{1-m}{2} \end{cases}$. Tính được:

$$d(O;AB) = \frac{|m|}{\sqrt{5}};\ AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2} = \frac{\sqrt{5(m^2+8)}}{2}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB.d(O;AB) = \frac{|m|\sqrt{m^2+8}}{4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = 2 \vee m = -2.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = 2;\ m = -2.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho khoảng các từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = (x+1)(kx + 2k + 1) \text{ (điều kiện: } x \neq -1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \quad (1). \text{ (điều kiện: } x \neq -1\text{)}$$

d cắt (C) tại hai điểm $A,\ B$ phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(-1)^2 + (3k-1)(-1) + 2k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1),\ B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$ với $x_1,\ x_2$ là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-3k+1}{k} \\ x_1x_2 = 2 \end{cases}$. Tính được

$$d\left(A;Ox\right)=d\left(B;Ox\right)\Leftrightarrow\left|kx_1+2k+1\right|=\left|kx_2+2k+1\right|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}kx_1+2k+1=kx_2+2k+1\\kx_1+2k+1=-kx_2-2k-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2\ (\text{loại})\\k\left(x_1+x_2\right)+4k+2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow k\left(x_1+x_2\right)+4k+2=0\Leftrightarrow k=-3.$$

Vậy $k=-3$ thỏa yêu cầu bài toán.