Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1 \quad (1)$, m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $A(1;2)$. *(Dự bị A1 - 2008)*

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R$

$y' = f'(x) = 3x^2 + 6mx + m + 1$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2m - 1$, $f'(-1) = -5m + 4$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1;2m-1)$: $y = (-5m+4)(x+1) + 2m - 1$ (d).

Ta có $A(1;2) \in (d) \Leftrightarrow (-5m+4).2 + 2m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{8}$.

Cho hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x+1} \quad (1)$. Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2;5)$. *(Dự bị D1 - 2008)*

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R \setminus \{-1\}$. Có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(-2;5)$: $y = 2(x+2) + 5 \Leftrightarrow y = 2x + 9$

Gọi A là giao điểm của d và trục hoành $\Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow x_A = -\dfrac{9}{2}$, vậy $A\left(-\dfrac{9}{2};0\right)$

Gọi B là giao điểm của d và trục tung $\Rightarrow x_B = 0 \Rightarrow y_B = 9$, vậy $B(0;9)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{9}{2}\right||9| = \dfrac{81}{4}$

Cho hàm số $y = \sqrt{3}x^3 + 4 \quad (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(d): -x + \sqrt{3}y + 6 = 0$ góc $30^0$.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R$. Ta có $y' = 3\sqrt{3}x^2$

$(d): \sqrt{3}y - x + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} \Rightarrow k_d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vì tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc $30^0$ nên thỏa $\left|\dfrac{k_{tt} - k_d}{1 + k_{tt}k_d}\right| = \tan 30^0$

$$\left|\frac{k_{tt} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}k_{tt}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\left(k_{tt} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}k_{tt}\right)^2 \Leftrightarrow k_{tt}^2 - \sqrt{3}k_{tt} = 0 \Leftrightarrow k_{tt} = 0 \vee k_{tt} = \sqrt{3}$$

Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm

Với $k_{tt} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm (0 ; 4): $y = 4$.

Với $k_{tt} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x_0^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Với $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = \frac{13}{3}$, phương trình tiếp tuyến $y = \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{13}{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{10}{3}$.

Với $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = \frac{11}{3}$, phương trình tiếp tuyến $y = \sqrt{3}\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{11}{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{14}{3}$.

Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ $(C)$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị $(C)$, hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R$. Ta có $y' = -3x^2 - 6x + 9$

Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0) = -3x_0^2 - 6x_0 + 9$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = -3(x_0^2 + 2x_0 + 1) + 12 = -3(x_0 + 1)^2 + 12 \le 12$

Từ đó suy ra $\max f'(x_0) = 12$ tại $x_0 = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -16$, phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = 12(x+1) - 16 \Leftrightarrow y = 12x - 4$

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ $(C)$. Gọi $I(1\,;\,2)$. Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ vuông góc với đường thẳng $IM$ ***.(Dự bị B2 - 2003)***

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R$. Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0, y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}$

Ta có $\overrightarrow{IM} = \left(x_0 - 1; \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1} - 2\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \left(x_0 - 1; \frac{1}{x_0 - 1}\right) \Rightarrow k_{IM} = \frac{1}{(x_0 - 1)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M $k_{tt} = f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng IM nên có $k_{tt}.k_{IM} = -1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0 - 1)^4} = 1 \Leftrightarrow x_0 - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 = 0 \vee x_0 = 2$

Vậy có 2 điểm $M_1(0;1), M_2(2;3)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ $(C)$. Tìm điểm $M \in (C)$, biết tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ cắt hai trục tọa độ tại $A, B$ và tam giác $OAB$ có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ ***.(Khối D - 2007)***

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0 + 1}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y=\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+1}\Leftrightarrow y=\frac{2}{(x_0+1)^2}x+\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$ $(d)$

Gọi A là giao điểm của d và trục Ox, có $y_A=0\Rightarrow x=-x_0^2$. Vậy $A(-x_0^2;0)$

Gọi B là giao điểm của d và trục Oy, có $x_B=0\Rightarrow y_B=\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$. Vậy $B\left(0;\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$

Ta có tam giác OAB cân tại O, theo giả thiết ta có: $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\left|-x_0^2\right|.\left|\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x_0^2=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2=x_0+1\\2x_0^2=-x_0-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2-x_0-1=0\\2x_0^2+x_0+1=0\end{array}\right.$

Với $2x_0^2+x_0+1=0$ phương trình vô nghiệm.

Với $2x_0^2-x_0-1=0\Leftrightarrow x_0=1\vee x_0=-\frac{1}{2}$

Với $x_0=1$ ta có $M(1;1)$. Với $x_0=-\frac{1}{2}$ ta có $M\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M(1;1)$, $M\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

(*) Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ $(C)$. Qua điểm $A\left(\frac{4}{9};\frac{4}{3}\right)$ có thể kẻ được mấy tiếp tuyến đến đồ thị $(C)$. Viết phương trình các tiếp tuyến ấy .

LỜI GIẢI

Cho hai hàm số $y=\frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của các hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tìm góc giữa hai tiếp tuyến trên.

LỜI GIẢI

**Cho hàm số :** $y=\frac{3x+1}{1-x}$ $(C)$ .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M(-1\,;-1)$ ;

b) Vết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại giao điểm của $(C)$ với trục hoành;

c) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại giao điểm của $(C)$ với trục tung ;

d) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ bết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d):4x-y+1=0$ ;

e) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta):4x+y-8=0$ .

LỜI GIẢI

Tìm các điểm trên đồ thị $(C):y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = ¡$ . Ta có $y' = x^2 - 1$

Gọi $M\left(x_0; \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + \frac{2}{3}\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với đồ thị (C), sao cho d vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến d là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = (x_0^2 - 1)(x - x_0) + \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow y = (x_0^2 - 1)x - \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{2}{3}$.

(d) vuông góc với ( $\Delta$ ) khi và chỉ khi $(x_0^2 - 1)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

Kết luận có hai tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$ và $M(-2; 0)$.

Cho đồ thị $(C_m): y = \frac{(3m+1)x - m}{x + m}$.Tìm m để tiếp tuyến tại giao điểm của $(C_m)$ với Ox song song với đường thẳng d: $y = -x - 5$.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = ¡ \setminus \{-m\}$. Ta có $y' = \frac{3m^2 + 2m}{(x+m)^2}$.

Tọa độ giao điểm của $(C_m)$ và trục Ox là $A\left(\frac{m}{3m+1}; 0\right)$. Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ của $(C_m)$ tại điểm A là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{(3m+1)^2}{3m^2 + 2m}\left(x - \frac{m}{3m+1}\right) \Leftrightarrow y = \frac{(3m+1)^2}{3m^2 + 2m}x - \frac{m(3m+1)}{3m^2 + 2m}$.

Để $\Delta$ song song với d: $y = -x - 5$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{(3m+1)^2}{3m^2 + 2m} = -1 \\ \frac{m(3m+1)}{3m^2 + 2m} \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m^2 + 8m + 1 = 0 \\ 12m^2 + 9m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6} \vee m = -\frac{1}{2}.$$

Kết luận $m = -\frac{1}{6} \vee m = -\frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu.

Cho hàm số (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(-6; 5)$ của đồ thị (C).

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = ¡ \setminus \{2\}$. Ta có $y' = \frac{-4}{(x-2)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) cần tìm với đồ thị hàm số (C) nên $y_0 = \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$ và $f'(x_0) = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}$. Phương trình tiếp tuyến (d):

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$$

Ta có $A(-6;5)\in d \Leftrightarrow \dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(-6-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}=5 \Leftrightarrow 4x_0^2-24x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0 \vee x_0=6$.

Kết luận có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=-x-1$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{2}$.

> Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{m}{2}x^2+\dfrac{1}{3}$ $(*)$ (m là tham số).
> Gọi M là điểm thuộc (Cm) có hoành độ bằng $-1$. Tìm m để tiếp tuyến của (Cm) tại điểm M song song với đường thẳng $5x-y=0$.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-mx$

Điểm thuộc $(C_m)$ có hoành độ $x=-1$ là $M\left(-1;-\dfrac{m}{2}\right)$

Phương trình tiếp tuyến của $(C_m)$ tại M là:

$(\Delta): y=f'(1)(x+1)-\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow y=(m+1)x+\dfrac{m+2}{2}$

Để $\Delta$ song song với d: $5x-y=0 \Leftrightarrow y=5x$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} m+1=5 \\ m+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m=4$.

Kết luận $m=4$.

> Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ $(1)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (1), biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;-9)$.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Có $y'=12x^2-12x$.

Gọi $A(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) cần tìm với đồ thị hàm số (1) nên $y_0=4x_0^3-6x_0^2+1$ và $f'(x_0)=12x_0^2-12x_0$. Phương trình tiếp tuyến (d):

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=(12x_0^2-12x_0)(x-x_0)+4x_0^3-6x_0^2+1$

Ta có $M(-1;-9)\in d \Leftrightarrow (12x_0^2-12x_0)(-1-x_0)+4x_0^3-6x_0^2+1=-9$

$\Leftrightarrow -8x_0^3-6x_0^2+12x_0+10=0 \Leftrightarrow x_0=-1 \vee x_0=\dfrac{5}{4}$

Kết luận có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=24x+15$ và $y=\dfrac{15}{4}x-\dfrac{21}{4}$.

> Cho đồ thị (C): $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2-\dfrac{9}{4}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với Ox.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^3-4x$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox: $\dfrac{1}{4}x^4-2x^2-\dfrac{9}{4}=0 \Leftrightarrow x^2=9 \vee x^2=-1$ (loại). Với

$x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=0 \\ x=-3 \Rightarrow y=0\end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(3;0)$ của (C): $y=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y=15x-45$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-3;0)$ của (C): $y=f'(-3)(x-3) \Leftrightarrow y=-15x+45$.