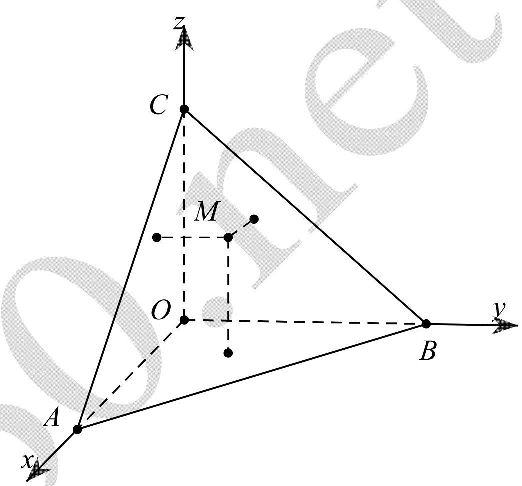
Ví dụ 1.7 Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = a, OB = b, OC = c$ đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các $mp(OBC)$, $mp(OCA)$, $mp(OAB)$ là $1,\ 2,\ 3$. Tính $a,\ b,\ c$ để thể tích $O.ABC$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$



Vì khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $mp(OBC)$, $mp(OCA)$, $mp(OAB)$ là $1,\ 2,\ 3$ nên $M(1;2;3)$. Suy ra phương trình

$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vì $M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ (1).Thể tích khối chóp $O.ABC$:

$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc$.

Từ $(1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27$

Vậy, $\min V_{OABC} = 27$ đạt được khi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3, b = 6, c = 9$

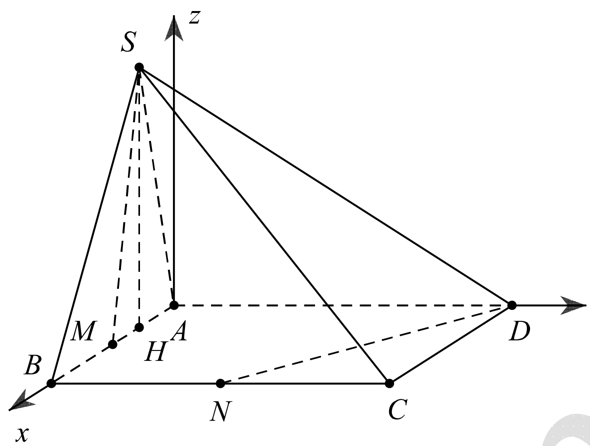
Ví dụ 2..7 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có: $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow AH = \frac{SA^2}{AB} = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:



$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), H\left(\frac{a}{2};0;0\right), S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$M(a;0;0), N(2a;a;0)$.

Ta có $S_{\Delta ADM} = S_{\Delta CDN} = \frac{1}{2}a.2a = a^2 \Rightarrow S_{BNDM} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$

Thể tích khối chóp $S.BMDN$: $V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Vì $\overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{DN} = (2a;-a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN} = a^2$

Vậy $\cos(SM, DN) = \frac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{SM.DN} = \frac{a^2}{a.\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

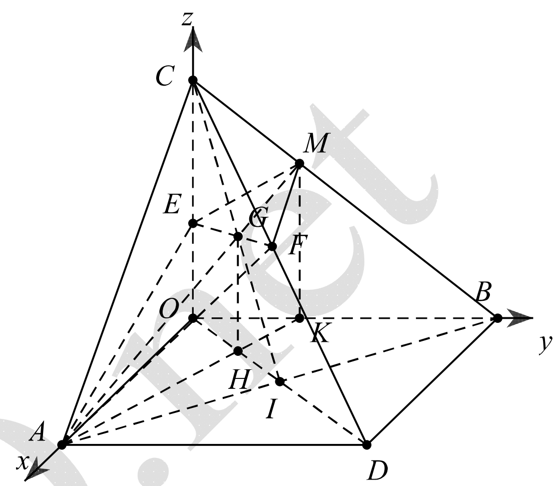
Ví dụ 3.7 Trên các tia Ox, Oy, Oz của góc tam diện vuông $Oxyz$ lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = c, \quad (a, c > 0)$ .Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật $AOBD$ và M là trung điểm của đoạn $BC.$ Mặt phẳng (α) qua A, M cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM.

1. Gọi E là giao điểm của (α) với đường thẳng $OC.$ Tính độ dài đoạn thẳng OE;

2. Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AOBD$ bởi mặt phẳng (α). Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (α)

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho: $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(a;\ 0;\ 0)$, $B\left(0;\ a\sqrt{2};\ 0\right)$, $D\left(a;\ a\sqrt{2};0\right)$, $C(0;\ 0;\ c)$



1. Vì M là trung điểm của BC nên $M\left(0;\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{c}{2}\right)$.

$\overrightarrow{OC}(0;\ 0;\ c)$, $\overrightarrow{OD}\left(a;\ a\sqrt{2};0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OC};\ \overrightarrow{OD}\right]=\left(-ac\sqrt{2};\ ac;\ 0\right)$

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (OCD) là $\overrightarrow{n_{OCD}}=\left(-\sqrt{2};\ 1;\ 0\right)$.

Gọi $F=(\alpha)\cap CD$ thì EF là giao tuyến của (α) với (OCD), ta có $EF\perp AM$.

Vì $\overrightarrow{AM}=\left(-a;\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{c}{2}\right)$ nên $\left[\overrightarrow{n_{OCD}},\overrightarrow{AM}\right]=\dfrac{c}{2}(1;\ \sqrt{2};\ 0)$, do đó một véc tơ chỉ phương của EF là $\overrightarrow{u_{EF}}=(1;\ \sqrt{2};\ 0)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_{EF}},\ \overrightarrow{AM}\right]=\dfrac{1}{2}\left(c\sqrt{2};\ -c;\ 3\sqrt{2}a\right)$ nên phương trình mặt phẳng (α) là $:\sqrt{2}cx-cy+3\sqrt{2}az-ac\sqrt{2}=0$.

Do đó $(\alpha)\cap Oz=E\left(0;\ 0;\ \dfrac{c}{3}\right)\Rightarrow OE=\dfrac{c}{3}$.

2. Ta có $(\alpha)\cap CD=F\left(\dfrac{2a}{3};\ \dfrac{2\sqrt{2}a}{3};\ \dfrac{c}{3}\right)\Rightarrow \dfrac{CF}{CD}=\dfrac{2}{3}$.

Mà $V_{COADB}=2V_{CAOD}=2V_{CBOD}$ nên

$$\frac{V_{CEAFM}}{V_{COADB}} = \frac{V_{CAEF}}{2V_{CAOD}} + \frac{V_{CMEF}}{2V_{CBOD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD} + \frac{CM}{CB}.\frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD}\right) = \frac{1}{3}$$

Do đó tỷ số thể tích hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AODB$ bởi mặt phẳng (α) là $\frac{1}{2}$ (hay 2).

Khoảng cách cần tìm : $d(C,\ (\alpha)) = \frac{\left|3\sqrt{2}ac - ac\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2c^2 + c^2 + 18a^2}} = \frac{2\sqrt{6}ac}{3\sqrt{c^2 + 6a^2}}$.

Ví dụ 4.7 Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, A' \in Oz$ và $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$.

1. Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp;

2. Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E \perp A'C$

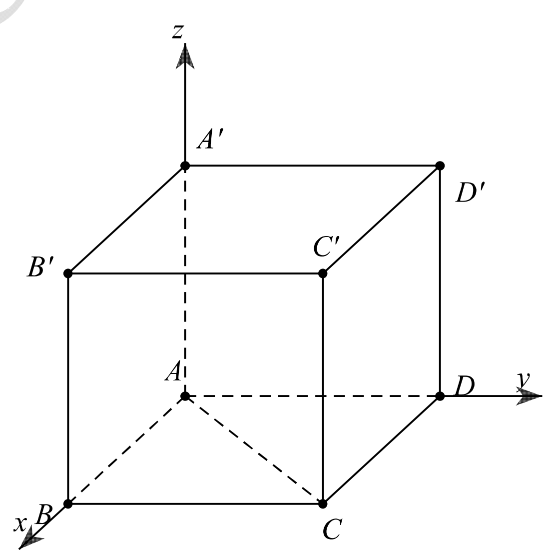
3. Tìm điểm M thuộc $A'C$, N thuộc BD sao cho $MN \perp BD, MN \perp A'C$. Từ đó tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C$ và BD

Lời giải.

1. Ta có $A(0;0;0), B(1;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;3)$.

Hình chiếu của C lên (Oxy) là C, hình chiếu của C lên Oz là A nên $C(1;2;0)$.

Hình chiếu của B', C', D' lên mp(Oxy) và trục Oz lần lượt là các điểm B, C, D và A' nên $B'(1;0;3)$, $C'(1;2;3)$, $D'(0;2;3)$.



2. Vì E thuộc đường thẳng DD' nên $E(0;2;z)$, suy ra $\overrightarrow{B'E} = (-1;2;z-3)$

Mà $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$ nên

$B'E \perp A'C \Leftrightarrow \overrightarrow{B'E}.\overrightarrow{A'C} = 0 \Leftrightarrow -1 + 4 - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 4$.

Vậy $E\left(0;2;4\right)$.

3. Đặt $\overrightarrow{A'M} = x.\overrightarrow{A'C};\ \overrightarrow{BN} = y.\overrightarrow{BD}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + x.\overrightarrow{A'C} = \left(x;2x;3-3x\right)$, suy ra $M\left(x;2x;3-3x\right)$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{BD} = \left(1-y;2y;0\right) \Rightarrow N\left(1-y;2y;0\right)$

Theo giả thiết của đề bài, ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \quad (*)$

Mà $\overrightarrow{MN} = \left(1-x-y;2y-2x;3x-3\right), \overrightarrow{A'C} = \left(1;2;-3\right),\ \overrightarrow{BD} = \left(-1;2;0\right)$

Khi đó $(*)$ trở thành

$$\begin{cases} 1-x-y+4y-4x-9x+9=0 \\ -1+x+y+4y-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x+3y=-10 \\ -3x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{53}{61} \\ y = \dfrac{44}{61} \end{cases}$$

Do đó $M\left(\dfrac{53}{61};\dfrac{106}{61};\dfrac{24}{61}\right),\ N\left(\dfrac{17}{61};\dfrac{88}{61};0\right)$.

Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $A'C, BD$

$$d\left(A'C,BD\right) = MN = \sqrt{\left(1-x-y\right)^2 + (2y-2x)^2 + (3x-3)^2} = \frac{6\sqrt{61}}{61}.$$

Ví dụ 5.7 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a ***Đề thi ĐH khối A – 2011***

Lời giải.

Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên suy ra $SA \perp (ABC)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $SA = x, x > 0$

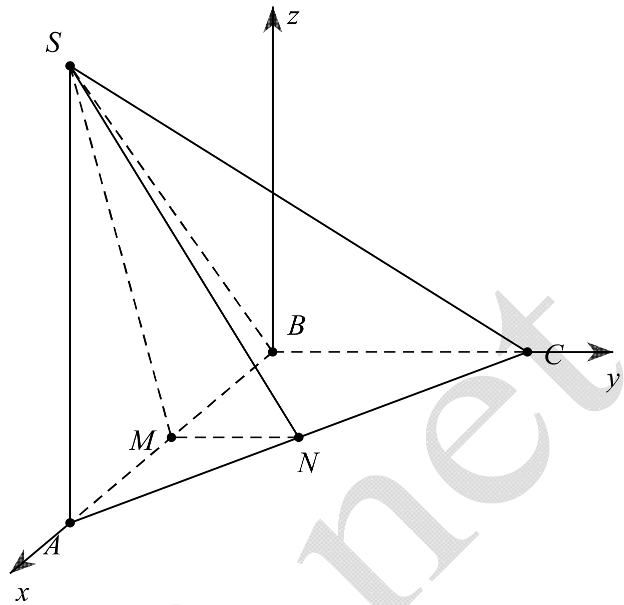
Vì $MN // BC \Rightarrow N$ là trung điểm cạnh AC

Tọa độ các đỉnh là:

$B(0;0;0)$, $A(2a;0;0)$,

$C(0;2a;0)$, $S(2a;0;x)$,

$M(a;0;0), N(a;a;0)$



Suy ra $\overrightarrow{BS} = (2a;0;x), \overrightarrow{BC} = (0;2a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(-2ax;0;4a^2\right)$

Do đó $\vec{n} = (x;0;-2a)$ là VTPT của mặt phẳng (SBC)

$\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC)

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{x^2+4a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{3}$$

Vì M, N là trung điểm của AB, CB nên

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{BMNC} = \frac{3}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{3a^2}{2}$$

Từ đó suy ra thể tích khối chóp $S.BMNC$ là:

$$V_{S.BMNC} = \frac{1}{3}SA.S_{BMNC} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (2a;0;0), \overrightarrow{SN} = \left(-a;a;2a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BN} = (a;a;0)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right] = \left(0;-4\sqrt{3}a^2;2a^2\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN} = -4\sqrt{3}a^3$

Vậy $d\left(AB, SN\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right]\right|} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}a^2} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.