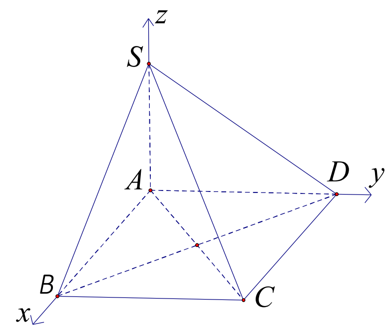


Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó

$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S(0;0;a)$.

Suy ra $\overrightarrow{SB}(a;0;-a), \overrightarrow{SC}(a;a;-a), \overrightarrow{SD}(0;a;-a)$,

Mặt phẳng (SBC) có một VTPT là : $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(a^2;0;a^2\right)$

Mặt phẳng (SDC) có một VTPT là : $\vec{k} = \left[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(0;-a^2;-a^2\right)$

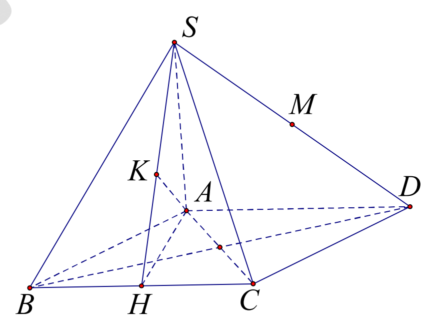
Vậy $\cos\left(\widehat{(SBC),(SDC)}\right) = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(SDC)}\right) = 60^0$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm SD, thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Hãy tính khoảng cách h từ M tới mặt phẳng (SBC) theo a.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{228}}{38}$.   B. $h = \dfrac{a\sqrt{228}}{19}$.   C. $h = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.   D. $h = \dfrac{2\sqrt{5}a}{19}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp (ABCD)$.

$\dfrac{DM}{DS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d\left(M,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2} d\left(D,(SBC)\right)$

$AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d\left(D,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2} d\left(A,(SBC)\right)$

Vậy $d\left(M,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2} d\left(A,(SBC)\right)$

Gọi H là trung điểm của BC, do tam giác ABC đều nên $AH \perp BC$,

lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$

Dựng $AK \perp SH \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = AK$.

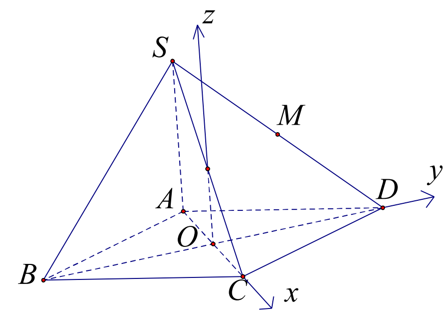
Diện tích hình thoi $ABCD$ là : $S_{ABCD} = AB.BC.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Từ đó suy ra $SA = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = 2a$. Tính được $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAH vuông tại A, đường cao AK nên :

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{228}}{19}$. Vậy $d\left(M,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a\sqrt{228}}{38}$

Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Oz//SA$. Khi đó ta có

$$O(0;0;0), A\left(\frac{-a}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{-a\sqrt{3}}{2};0\right), C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$$

$$D\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \Rightarrow S\left(\frac{-a}{2};0;2a\right), M\left(\frac{-a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SB}=\left(\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{2};-2a\right), \overrightarrow{SC}=(a;0;-2a), \overrightarrow{SM}=\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};-a\right)$$

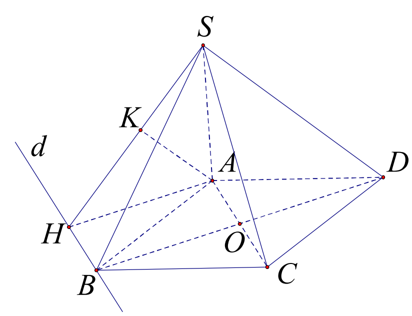
Vậy $d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{228}}{38}$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD}=120^0$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. Hãy tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SB và AC theo a.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.   B. $h=\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.   C. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.   D. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$.

Dựng đường thẳng d qua B và song song với AC.

Dựng $AH\perp d, AK\perp SH$. Ta chứng minh được $AK\perp(SBH)$

$AC//HB \Rightarrow AC//(SBH) \Rightarrow d(AC,SB)=d(AC,(SBH))=AK$

$BO\perp AC, AH\perp HB \Rightarrow AH\perp AC$ suy ra $AH//BO$.

Vậy tứ giác $AHBO$ là hình chữ nhật nên $AH=BO=a\sqrt{3}$

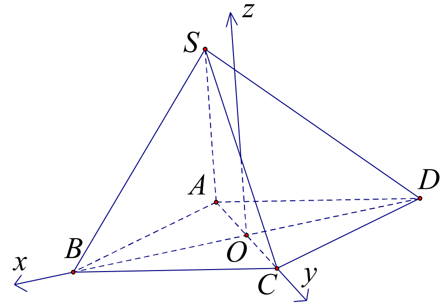
Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB.BC.\sin 60^0=2\sqrt{3}a^2$

Suy ra $AH=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=a$

Tam giác SAH vuông tại A, đường cao AK nên $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AH^2}+\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(AC,SB)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Oz//SA$. Khi đó ta có
$O(0;0;0), A(-a;0;0), B(0;\sqrt{3}a;0), C(a;0;0), S(-a;0;a)$

Suy ra $\overrightarrow{SB}=(a;a\sqrt{3};-a), \overrightarrow{OB}=(0;a\sqrt{3};0), \overrightarrow{OC}=(a;0;0)$

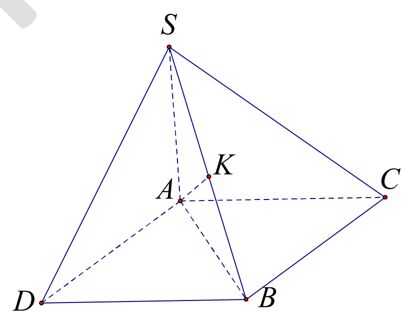
Vậy $d(AC,SB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{SB}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc φ tạo bởi hai đường thẳng SB và AC.

A. $\varphi=60^0$. B. $\varphi=90^0$. C. $\varphi=30^0$. D. $\varphi=45^0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$.

Dựng $AK\perp SB$. Ta có :

$BC\perp AB, BC\perp SA \Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AK$

Vậy $AK\perp(SBC)$, từ đó suy ra $AK=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SAB vuông tại A, đường cao AK nên ta có :

$\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AK^2}-\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow SA=a$

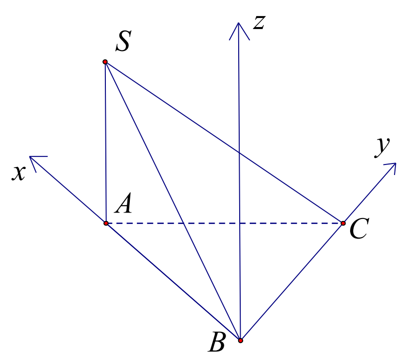
Dựng hình bình hành $ACBD$ như hình vẽ, khi đó:

$AC//BD\Rightarrow \widehat{(AC,SB)}=\widehat{(BD,SB)}$

Tính được $SD=a\sqrt{2}, SB=a\sqrt{2}, BD=a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD đều

Vậy $\widehat{(AC,SB)}=\widehat{SBD}=60^0$.

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Bz//SA$. Khi đó theo cách 1 ta có :
$B(0;0;0), A(a;0;0), C(0;a;0), S(a;0;a)$.

Suy ra $\overrightarrow{BS}=(a;0;a), \overrightarrow{AC}=(-a;a;0)$.

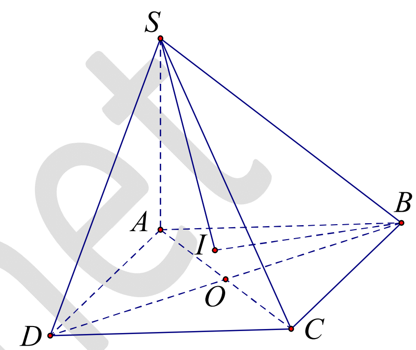
Vậy $\cos\widehat{(AC,SB)}=\dfrac{\left|\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{BS}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{(AC,SB)}=60^0$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3}{3}$. Tính góc φ giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD).

A. $\varphi=30^0$. B. $\varphi=60^0$. C. $\varphi=45^0$. D. $\varphi=90^0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$.

Do đó $SA=\frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=a$

Tam giác SAD vuông tại A nên $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{2}$

Ta có $CD\perp AD, CD\perp SA\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp SD$

Vậy diện tích tam giác SCD là : $S_{SCD}=\frac{1}{2}SD.CD=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Gọi I là hình chiếu của B lên mặt phẳng (SCD) khi đó $\widehat{(SB,(SCD))}=\widehat{(SB,SI)}=\widehat{BSI}$

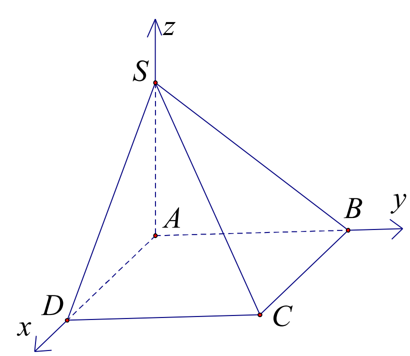
Mặt khác $BI=\frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}}=\frac{3V_{S.ABCD}}{2S_{SCD}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SAB vuông tại A nên $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{2}$

Tam giác SIB vuông tại I nên $\sin\widehat{BSI}=\frac{BI}{SB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BSI}=30^0$

Vậy $\widehat{(SB,(SCD))}=30^0$.

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, khi đó theo cách 1 ta tính được $SA=a$

Nên $A(0;0;0), D(a;0;0), B(0;a;0), C(a;a;0), S(0;0;a)$

Suy ra $\overrightarrow{SD}=(a;0;-a), \overrightarrow{SC}=(a;a;-a), \overrightarrow{SB}=(0;a;-a)$

Mặt phẳng (SCD) có một vectơ pháp tuyến là:

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SC}\right]=\left(a^2;a^2;2a^2\right)$.

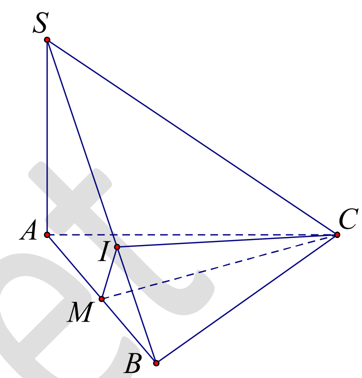
Vậy $\sin\widehat{(SB,(SCD))}=\frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{SB}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{(SB,(SCD))}=30^0$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Tính côsin của góc φ giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{7}$. C. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. D. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SA \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của AB, do tam giác ABC đều nên $CM \perp AB$,

lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM$ suy ra $CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$.

Dựng $CI \perp SB$ thì $SB \perp (CMI) \Rightarrow SB \perp IM$

Vậy $IM \perp SB, CI \perp SB \Rightarrow \widehat{((SAB),(SBC))} = \widehat{(MI, CI)}$

Hai tam giác SAB và MIB đồng dạng nên :

$$\frac{SA}{MI} = \frac{SB}{MB} \Rightarrow MI = \frac{MB.SA}{SB} = \frac{AB.SA}{2\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Tam giác CMB vuông tại M nên : $CM = \sqrt{CB^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

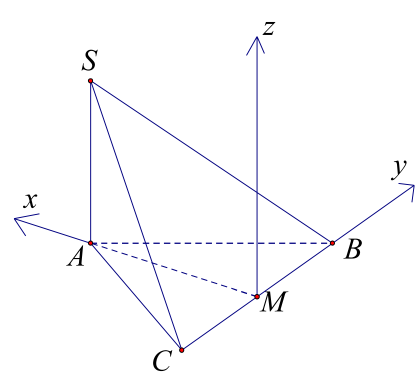
Tam giác IMB vuông tại I nên : $IB = \sqrt{MB^2 - IM^2} = \dfrac{a}{4}$

Tam giác CIB vuông tại I nên : $CI = \sqrt{CB^2 - IB^2} = \dfrac{\sqrt{15}a}{4}$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác IMC ta có :

$$\cos\widehat{CIM} = \frac{CI^2 + IM^2 - CM^2}{2CI.IM} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, M là trung điểm BC, $Oz // SA$

Khi đó $M(0;0;0), A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right), S\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;a\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{SA} = (0;0;-a\sqrt{3}), \overrightarrow{SB} = \left(\dfrac{-a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};-a\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{MS} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{MB} = \left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$

Mặt phẳng (SAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right] = \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};\dfrac{3a^2}{2};0\right)$

Mặt phẳng (SBC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = \left[\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MB}\right] = \left(\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2};0;\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

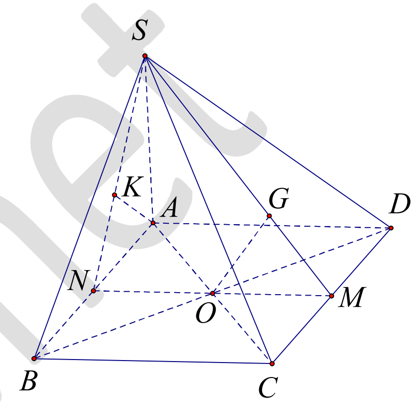
Vậy $\cos\left(\widehat{(SAB),(SBC)}\right) = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O* cạnh *a*, cạnh *SA* vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45^0, gọi *G* là trọng tâm tam giác *SCD*. Tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng chéo nhau *OG* và *AD*.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $h=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *CD, AB*.

$AD//MN \Rightarrow AD//(SMN)$

$\Rightarrow d(AD,MN) = d(AD,(SMN)) = d(A,(SMN))$

Ta có : $MN \perp AB, MN \perp SA \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow (SMN) \perp (SAB)$

Dựng $AK \perp SN \Rightarrow AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A,(SMN)) = AK$

Lại có $SA \perp (ABCD)$ nên *AC* là hình chiếu của *SC* lên mặt phẳng $(ABCD)$.

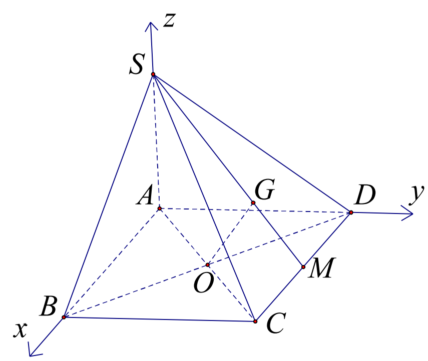
Từ đó suy ra $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA} = 45^0$

Vậy giác *SAC* vuông cân, suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác *SAN* vuông tại *A*, đường cao *AK* suy ra :

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, theo cách 1 ta tính được $SA = a\sqrt{2}$

Khi đó $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S(0;0;a\sqrt{2})$

Suy ra $O\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right), G=\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{2a}{3};\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right), \overrightarrow{OG}=\left(\dfrac{-a}{6};\dfrac{a}{6};\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

$\overrightarrow{AD}=(0;a;0), \overrightarrow{AO}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.

Vậy $d(AD,OG) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{OG}\right].\overrightarrow{AO}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{OG}\right]\right|} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 22. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O*, cạnh *a*, $\widehat{BAD}=120^0$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt đáy, góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45^0. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, tính khoảng cách *h* từ *G* đến mặt phẳng (SCD) theo *a*.

A. $h=\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$. B. $h=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. C. $h=\dfrac{\sqrt{7}a}{14}$. D. $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{7}$.

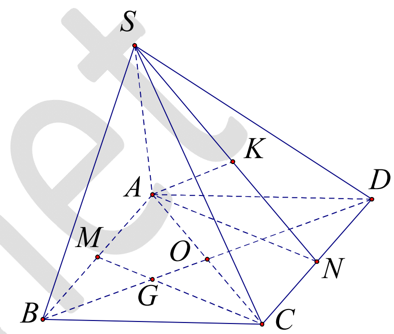
Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình

Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD khi đó $G=CM\cap BO$.

Ta có $AM//CD\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)$

Lại có $\dfrac{GC}{MC}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow d\left(G,(SCD)\right)=\dfrac{2}{3}d\left(M,(SCD)\right)=\dfrac{2}{3}d\left(A,(SCD)\right)$



Tam giác ACD đều nên $AN\perp CD$, mà

$CD\perp SA\Rightarrow CD\perp(SAN)\Rightarrow(SAN)\perp(SCD)$

Dựng $AK\perp SN\Rightarrow AK\perp(SCD)\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=AK$

Do $SA\perp(ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra

$\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SC,AC}\right)=\widehat{SCA}=45^0\Rightarrow AC=SA=a$

Ta tính được $AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAN vuông tại A, đường cao AK nên ta có :

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AK=\frac{\sqrt{21}a}{7}$$

Vậy $d\left(G,(SCD)\right)=\dfrac{2}{3}AK=\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$

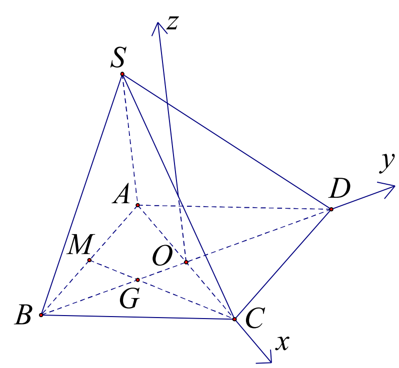
Cách 2 : phương pháp tọa độ

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, theo cách 1 ta tính được $SA=a$

Khi đó $O(0;0;0),A\left(\dfrac{-a}{2};0;0\right),C\left(\dfrac{a}{2};0;0\right),D\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

$G\left(0;\dfrac{-a\sqrt{3}}{6};0\right),S\left(\dfrac{-a}{2};0;a\right)\Rightarrow\overrightarrow{CS}=(-a;0;a)$

$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\overrightarrow{CG}=\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{-a\sqrt{3}}{6};0\right)$



Vậy $d\left(G,(SCD)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{CG}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD}\right]\right|}=\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$

KHỐI CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC MẶT ĐÁY – HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

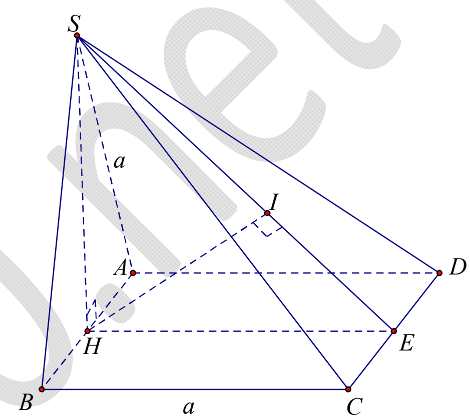
A. $h=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $h=a$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình.



Gọi H là trung điểm AB, ta có:

$$\begin{cases} (SAB)\perp(ABCD) \\ (SAB)\cap(ABCD)=AB \\ SH\perp AB, SH\subset(SAB) \end{cases} \Rightarrow SH\perp(ABCD)$$

$d(A,(SCD))=d(H,(SCD))$ (vì $AH//(SCD)$)

Gọi E là trung điểm CD, kẻ $HI\perp SE$, $I\in SE$ thì $d(H,(SCD))=HI$.

Tam giác SHE vuông tại H:

$$HI=\frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}+a^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy: $d(A,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

[Cách 2]: Phương pháp thể tích đổi đỉnh.

Ta tính được $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.\text{SH}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

$$d(A,(SCD))=\frac{3.V_{S.ACD}}{S_{SCD}}=\frac{3.\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}}{S_{SCD}}$$

Tính diện tích tam giác SCD:

Ta có: $CD=a$; $HC=HD=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow SC=SD=\sqrt{SH^2+HC^2}=a\sqrt{2}$

Vì $SC=SD$ nên gọi E là trung điểm CD: $SE=\sqrt{SC^2-CE^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta SCD}=\dfrac{1}{2}SE.CD=\dfrac{\sqrt{7}}{4}.a^2 \Rightarrow d(A,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

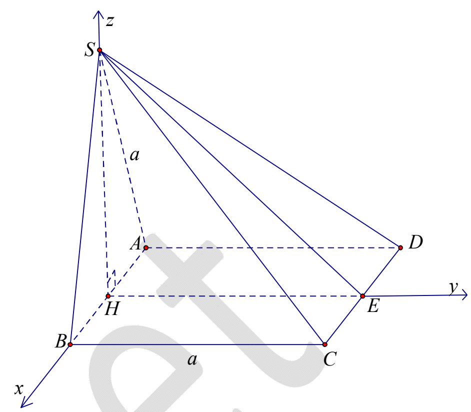
(Có thể dùng công thức Hê-rông kết hợp MTCT để tính diện tích tam giác SCD).

[Cách 3]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HA, trục tung là HE, trục cao là HS như hình.

$H(0;0;0)$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$;

$D\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$



$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2};-a^2\right)$

Vậy

$$d\left(A,(SCD)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]\right|}=\frac{\left|\frac{a^3\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{\frac{3a^4}{4}+a^4}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA, BC.

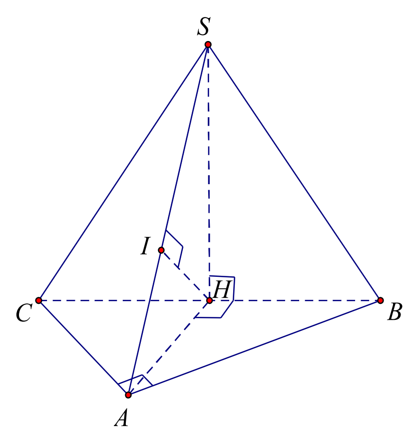
A. $h=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $h=\frac{a}{2}$. C. $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $h=\frac{3a}{4}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Trước tiên, ta cần kiểm tra xem SA và BC có vuông góc với nhau không.

Gọi H là trung điểm BC, SH là đường cao của hình chóp $S.ABC$.



Ta nhận thấy $SA\subset(SHA)$ có $SH\perp BC$, và do ABC là tam giác vuông cân tại A nên: $AH\perp BC$. Suy ra: $BC\perp(SHA)$ nên $BC\perp SA$.

BC cắt (SHA) tại H, kẻ $HI\perp SA$ $(I\in SA)$.

Suy ra HI là đoạn vuông góc chung của SA và BC nên $d(SA,BC)=HI$.

Ta có: $HI=\frac{SH\cdot HA}{\sqrt{SH^2+HA^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Vậy $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

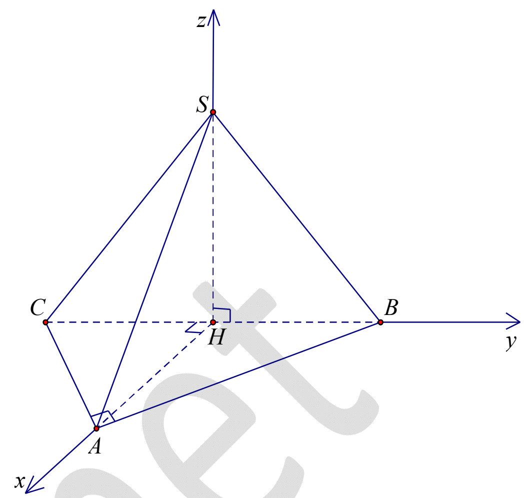
[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HA, trục tung là HB, trục cao là HS. Ta có:

$A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$;

$B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$.

Vậy $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA=a$; $SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $\left(SAB\right)$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.   B. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.   C. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.   D. $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi E là trung điểm AD, F là trung điểm AE.

Ta có $MF//BE//ND$

$\Rightarrow\left(SM,DN\right)=\left(SM,MF\right)$.

$SM^2=\dfrac{SB^2+SA^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}=a$

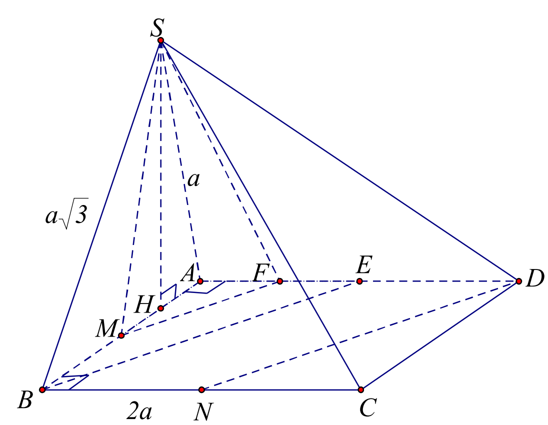
$\Rightarrow SM=SA\Rightarrow SH\perp MA$, với H là trung điểm MA.

$\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$

$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=a\sqrt{5}\Rightarrow MF=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$;

$HF=\dfrac{1}{4}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$SF=\sqrt{SH^2+HF^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (ΔSHF vuông tại H)



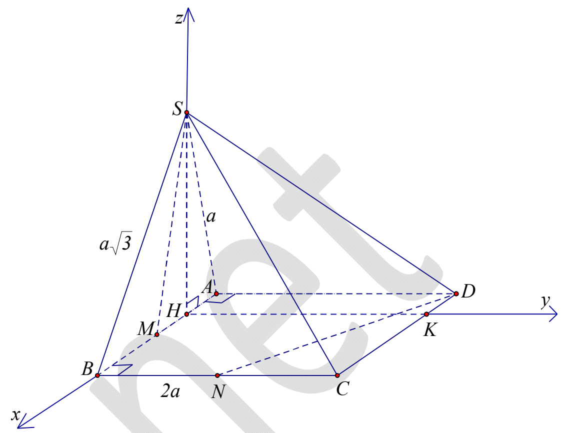
Định lí côsin trong ΔSMF : $SF^2 = SM^2 + MF^2 - 2SM.MF\cos\widehat{SMF}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5a^2}{4} = a^2 + \dfrac{5a^2}{4} - 2.a.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cos\widehat{SMF} \Leftrightarrow \cos\widehat{SMF} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \cos\left(SM, MF\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành HB, trục tung là HK, trục cao là HS.



$SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$M\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(-\dfrac{a}{2};2a;0\right)$;

$N\left(\dfrac{3a}{2};a;0\right)$.

Vậy $\cos\left(SM, DN\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{\left|\overrightarrow{SM}\right|.\left|\overrightarrow{DN}\right|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

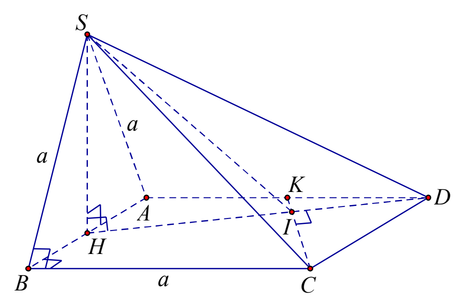
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của AB. Tính côsin của góc giữa SC và (SHD).

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. B. $\dfrac{3}{5}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi K là trung điểm AD, $I = CK \cap HD$



Ta có: $\begin{cases} CI \perp HD \\ CI \perp SH \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SHD)$ tại I

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC lên (SHD) và tam giác SIC vuông tại I

$\Rightarrow \cos\left(SC,(SHD)\right) = \cos\left(SC, SI\right) = \cos\widehat{CSI}$

$DI = \dfrac{DK.DC}{\sqrt{DK^2 + DC^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$; $IC = \sqrt{DC^2 - ID^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$;

$SI = \sqrt{SC^2 - CI^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\cos\left(SC,(SHD)\right) = \cos\widehat{CSI} = \dfrac{SI}{SC} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

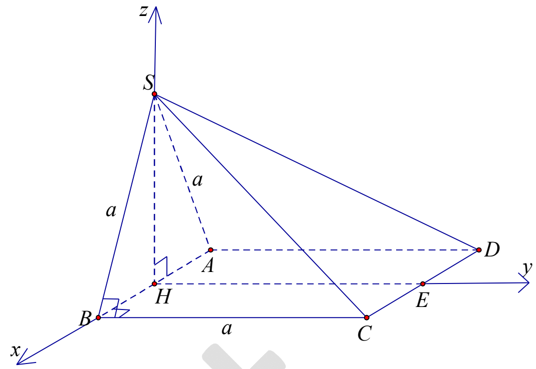
[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H,

trục hoành là HB, trục tung là HE, trục cao là HS.

$H(0;0;0)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$; $D\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$

.



Ta có:

$\left[\overrightarrow{HS},\overrightarrow{HD}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{4};0\right)\Rightarrow \vec{n}=(2;1;0)$ là

một vectơ pháp tuyến của (SHD).

$\Rightarrow \sin\left(SC,(SHD)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{SC},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{SC}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

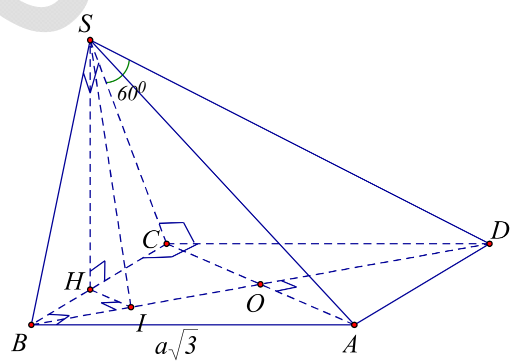
Vậy $\cos\left(\overrightarrow{SC},(SHD)\right)=\sqrt{1-\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$. Tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60^0. Tính góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Từ S dựng $SH\perp BC$, suy ra $SH\perp(ABCD)$. Từ H dựng $HI//AC, I\in BD$, suy ra $HI\perp BD$.

Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIH}$.

Ta có: $\begin{cases}DC\perp BC\\DC\perp SH\end{cases}\Rightarrow DC\perp(SBC)$

$\Rightarrow\left(SD,(SBC)\right)=\widehat{DSC}=60^0$ và $DC\perp SC$.

$\Rightarrow SC=\frac{CD}{\tan 60^0}=a$

$\Rightarrow SH=\frac{SB.SC}{BC}=a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$BH=\sqrt{SB^2-SH^2}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

Theo Ta-let: $\frac{BH}{BC}=\frac{IH}{OC}\Rightarrow IH=\frac{BH.OC}{BC}=a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

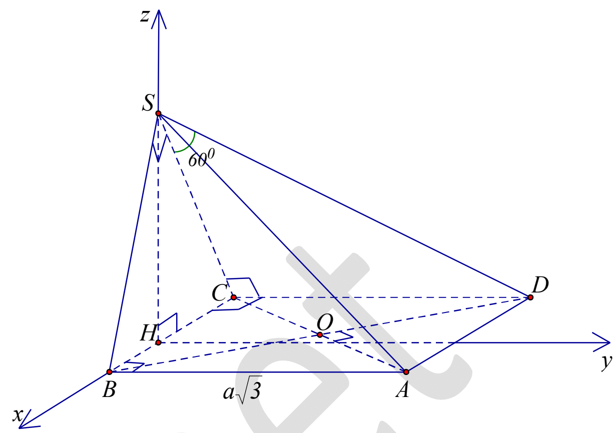
$\Rightarrow SH=IH\Rightarrow\Delta SHI$ vuông cân tại H

Vậy $\widehat{SIH}=\frac{\pi}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Từ S dựng $SH \perp BC$, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Từ H dựng $HI // AC, I \in BD$, suy ra $HI \perp BD$.

Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ .là $\widehat{SIH}$.



Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HB, trục tung là Hy song song CD, trục cao là HS.

Ta có: $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBC)$

$\Rightarrow (SD,(SBC)) = \widehat{DSC} = 60^0$ và $DC \perp SC$.

$\Rightarrow SC = \dfrac{CD}{\tan 60^0} = a \Rightarrow SH = \dfrac{SB.SC}{BC} = a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

$H(0;0;0)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $B\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}};0;0\right)$;

$D\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}};a\sqrt{3};0\right)$ (vì $HC = BC - BH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$)

Ta có: $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right] = \left(a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};2a^2\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left(1;1;\sqrt{2}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của (SBD).

$\left[\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HD}\right] = \left(0;0;2a^2\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (0;0;1)$ là một vectơ pháp tuyến của $(ABCD)$.

$\Rightarrow \cos((SBD),(ABCD)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\widehat{SIH} = \dfrac{\pi}{4}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB. Tính theo a khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBD).

A. $h = \dfrac{2a}{3}$. B. $h = \dfrac{a}{3}$. C. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình.

Gọi H là trung điểm AB, ta có:

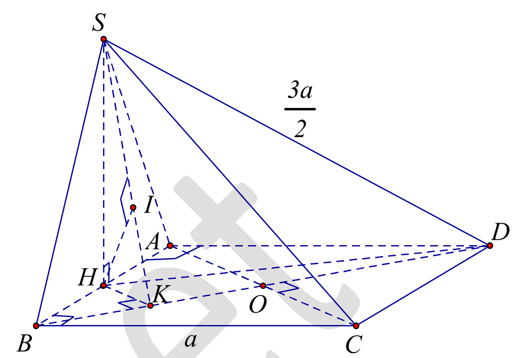
$SH \perp (ABCD)$

Gọi K là trung điểm OB thì $HK \perp OB$, kẻ $HI \perp SK$, $I \in SK$ thì $d(H,(SBD)) = HI$.

$AH \cap (SBD) = B$, $AB = 2HB$

$$\Rightarrow d\left(A,(SBD)\right)=2d\left(H,(SBD)\right)=2HI=2.\frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=2.\frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{8}}}=\frac{2a}{3}$$ với

$SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=a; HK=\frac{1}{4}AC=\frac{a\sqrt{2}}{4}$



[Cách 2]: Phương pháp thể tích đổi đỉnh.

Ta tính được $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{a^3}{3}$.

$$d\left(A,(SBD)\right)=\frac{3.V_{S.ABD}}{S_{SBD}}=\frac{3.\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}}{S_{SBD}}=\frac{2a}{3}.$$

Tính diện tích tam giác SBD:

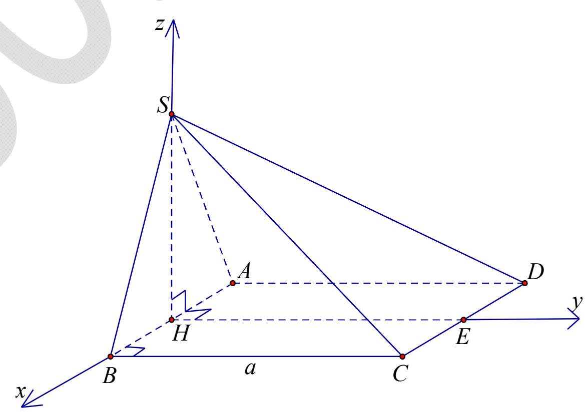
Ta có: $BD=a\sqrt{2}$; $SD=\frac{3a}{2}$ $SB=\sqrt{SH^2+HB^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Dùng công thức Hê-rông kết hợp MTCT:

$$p=\frac{SB+SD+BD}{2}; S_{SBD}=\sqrt{p\left(p-\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)\left(p-\frac{3a}{2}\right)\left(p-\sqrt{2}\right)}=\frac{3a^2}{4}$$

[Cách 3]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HA, trục tung là HE, trục cao là HS như hình.



$SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=a$

$H(0;0;0)$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $S(0;0;a)$,

$B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$; $D\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$

$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right]=\left(a^2;a^2;-\frac{a^2}{2}\right)$

$$d\left(A,(SBD)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right]\right|}=\frac{a^3}{\frac{3a^2}{2}}=\frac{2a}{3}.$$

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $h=\frac{\sqrt{42}a}{8}$. B. $h=\frac{\sqrt{42}a}{12}$. C. $h=\frac{\sqrt{42}a}{12}$. D. $h=\frac{\sqrt{42}a}{12}$.

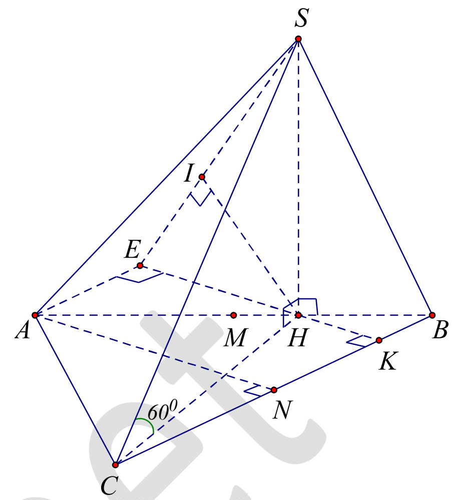
Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

$d(SA,BC)=d\left(BC,(SAt)\right), At//BC$

$= d\left(B,\left(SAt\right)\right)$, vì $BC//\left(SAt\right)$

Gọi N là trung điểm BC, qua H dựng $EK//AN, E \in At, K \in BC \Rightarrow AEKN$ là hình chữ nhật, $\left(SAt\right)$ là $\left(SAE\right)$. Dựng $HI \perp SE$ ta có:



$d\left(H,\left(SAE\right)\right) = HI = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}}$

$MH = \dfrac{1}{6}AB = \dfrac{1}{6}a \Rightarrow CH = \sqrt{CM^2 + MH^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$

$\left(SC,\left(ABC\right)\right) = \widehat{SCH} = 60^0, \tan 60^0 = \dfrac{SH}{CH} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

$HK = \dfrac{1}{3}AN \Rightarrow EH = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$d\left(H,\left(SAE\right)\right) = HI = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{12}$.

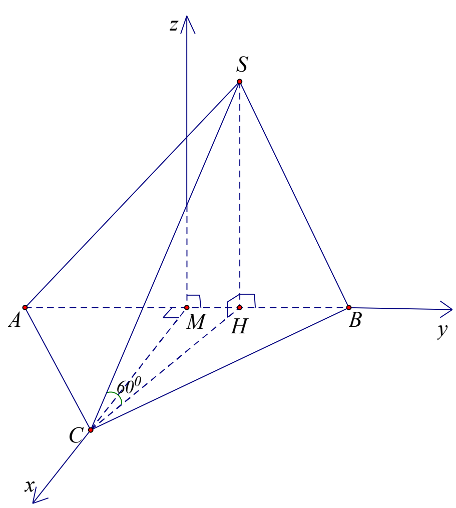
$BH \cap \left(SAE\right) = A, BA = \dfrac{3}{2}HA$

$\Rightarrow d\left(B,\left(SAE\right)\right) = \dfrac{3}{2}d\left(H,\left(SAE\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

Vậy $d\left(SA,BC\right) = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại M, trục hoành là MC, trục tung là MB, trục cao là $Mz//HS$. Ta có:



$MH = \dfrac{1}{6}AB = \dfrac{1}{6}a \Rightarrow CH = \sqrt{CM^2 + MH^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$

$\left(SC,\left(ABC\right)\right) = \widehat{SCH} = 60^0, \tan 60^0 = \dfrac{SH}{CH} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

$A\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$, $S\left(0;\dfrac{a}{6};\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)$, $B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$; $B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$.

$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right] = \left(\dfrac{a^2\sqrt{21}}{6};\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2};-\dfrac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow d\left(SA,BC\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|} = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD, có $AB = a; AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên $\left(ABCD\right)$ là trung điểm H của OD, $SH = 2a$. Tính côsin của góc $\left(AB,SD\right)$.