* Nếu Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right] = \overrightarrow{u_\Delta}$ là một VTCP của Δ (Trong đó $\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}$ lần lượt là VTPT của (P) và (Q)).

b) Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$

(1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ, t gọi là tham số.

Chú ý . Cho đường thẳng Δ có phương trình (1)

* $\vec{u} = (a; b; c)$ là một VTCP của Δ

* $M \in \Delta \Leftrightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

2. Phương trình chính tắc:

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ với $abc \neq 0$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (2)$$

(2) gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ có VTCP

$\overrightarrow{u_d} = (a; b; c)$ và $d': \frac{x - x_0'}{a'} = \frac{y - y_0'}{b'} = \frac{z - z_0'}{c'}$ đi qua $M'(x_0'; y_0'; z_0')$ có VTCP $\overrightarrow{u_{d'}} = (a'; b'; c')$.

* Nếu $[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}}]\overrightarrow{MM'} = 0 \Rightarrow d$ và d' đồng phẳng. Khi đó xảy ra ba trường hợp

$i)$ d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}] \neq \vec{0}$ và tọa độ gia điểm là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c} \\ \dfrac{x-x'_0}{a'}=\dfrac{y-y'_0}{b'}=\dfrac{z-z'_0}{c'} \end{cases}.$$

$ii)\ d//d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0} \\ [\vec{u},\overrightarrow{MM'}]\neq\vec{0} \end{cases}$

$iii)\ d\equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0} \\ [\vec{u},\overrightarrow{MM'}]=\vec{0} \end{cases}$

* Nếu $[\vec{u},\vec{u'}]\overrightarrow{MM'}\neq 0 \Rightarrow d$ và d' chéo nhau .

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho $mp(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT và đường thẳng

$\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP và đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

- Δ cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}$ và $\vec{u}$ không cùng phương $\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc\neq 0$. Khi đó tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ : $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 & \text{(a)} \\ \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c} & \text{(b)} \end{cases}$

Từ $(b)\Rightarrow x=x_0+at, y=y_0+bt, z=z_0+ct$ thế vào $(a)\Rightarrow t\Rightarrow$ giao điểm

* $\Delta//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}\perp\vec{u} \\ M_0\notin(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa+Bb+Cc=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases}$

* $\Delta\subset(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}\perp\vec{u} \\ M_0\in(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa+Bb+Cc=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$

* $\Delta\perp(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}$ và $\vec{u}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{n}=k.\vec{u}$.

5. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ đi qua M_0, có VTCP $\vec{u}$ và điểm $M\notin\Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ M đến Δ ta có các cách sau:

C 1: Sử dụng công thức: $d(M,\Delta) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

C 2: Lập phương trình $mp\left(P\right)$ đi qua M vuông góc với Δ. Tìm giao điểm H của (P) với Δ. Khi đó độ dài MH là khoảng cách cần tìm.

b) Khoảng cách giữ hai đường thẳng chéo nhau:

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua M_0 có VTCP $\vec{u}$ và Δ' đi qua M_0' có VTCP $\overrightarrow{u'}$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' được tính theo các cách sau:

C 1: Sử dụng công thức: $d(\Delta,\Delta') = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}$.

C 2: Tìm đoạn vuông góc chung MN. Khi đó độ dài MN là khoảng cách cần tìm.

C 3: Lập phương trình $mp\left(P\right)$ đi qua Δ và song song với Δ'. Khi đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ' đến (P).

IV. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u} = (a;b;c)$ và đường thẳng $\Delta': \dfrac{x-x_0'}{a'} = \dfrac{y-y_0'}{b'} = \dfrac{z-z_0'}{c'}$ có VTCP $\overrightarrow{u'} = (a';b';c')$.

Đặt $\alpha = \left(\Delta,\Delta'\right)$, khi đó:

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{u'}\right)\right| = \frac{\left|aa'+bb'+cc'\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho mp $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có $\vec{n} = \left(A;B;C\right)$ là VTPT và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-x_o}{a} = \dfrac{y-y_o}{b} = \dfrac{z-z_o}{c}$ có $\vec{u} = (a;b;c)$ là VTCP. Gọi φ là góc giữa $mp(\alpha)$ và đường thẳng Δ, khi đó ta có:

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{n},\vec{u}\right)\right| = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(A;B;C)$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=\left(A';B';C'\right)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^0 \le \varphi \le 90^0$). Khi đó:

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$