4.2 TÍCH PHÂN

B. BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Cho hai hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b xf(x)dx = x\int_a^b f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

D. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Câu 2. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int_a^a f(x)dx = 0$. B. $\int_a^a f(x)dx = 1$. C. $\int_a^a f(x)dx = -1$. D. $\int_a^a f(x)dx = f(a)$.

Câu 3. Tích phân $\int_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. 1. B. -1. C. 0. D. 2.

Câu 4. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^a e^{x+1}dx = e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 1. B. -1. C. 0. D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-1}^a e^{x+1}dx = e^{x+1}\Big|_{-1}^a = e^{a+1} - e$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương

$$e^{a+1} - 1 = e^2 - 1 \iff a = 1.$$

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0;\pi]$ đạt giá trị bằng 0 ?

A. $f(x) = \cos 3x$.

B. $f(x) = \sin 3x$.

C. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$.

D. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tính tích phân cho từng hàm số trong các đáp án:

- $\int_0^\pi \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^\pi = 0$,

- $\int_0^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = 2$,
- $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)dx = 4\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\left(\sqrt{2}-2\right)$,
- $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)dx = -4\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$.

Vậy chọn $f(x) = \cos 3x$.

Câu 6. Tích phân nào trong các tích phân sau có giá trị **khác** 2?

A. $\int_1^{e^2} \ln x dx$. B. $\int_0^1 2dx$. C. $\int_0^{\pi} \sin x dx$. D. $\int_0^2 x dx$.

Hướng dẫn giải

Dù giải bằng máy tính hay làm tay, ta không nên thử tính lần lượt từng đáp án từ A đến D, mà nên chọn các tích phân đơn giản để thử trước. Ví dụ

- $\int_0^1 2dx = 2x|_0^1 = 2$,
- $\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2$
- $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi} = 2$,

nên nhận $\int_1^{e^2} \ln x dx$.

Câu 7. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx$?

A. $f(x) = \sin x$. B. $f(x) = \cos x$.

C. $f(x) = e^x$. D. $f(x) = x + 1$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1: Phương pháp tự luận]

Tính lần lượt từng tích phân (cho đến khi nhận được kết quả đúng), ta được:

- $\int_{-1}^{1} \sin x dx = -\cos x|_{-1}^{1} = 0 = \int_{-2}^{2} \sin x dx$ → nhận,
- $\int_{-1}^{1} \cos x dx = \sin x|_{-1}^{1} = 2\sin 1$, và $\int_{-2}^{2} \cos x dx = \sin x|_{-2}^{2} = 2\sin 2$ → loại,

- $\int_{-1}^{1} e^x dx = e^x\big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$, và $\int_{-2}^{2} e^x dx = e^x\big|_{-2}^{2} = e^2 - e^{-2}$ → loại,
- $\int_{-1}^{1} (x+1)dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 2$, và $\int_{-2}^{2} (x+1)dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-2}^{2} = 4$ → loại.

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

[Cách 2: Phương pháp tự luận]

Ta đã biết nếu f là hàm số lẻ và liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ với mọi số thực a. Trong các lựa chọn ở đây, chỉ có hàm số $y = f(x) = \sin x$ là lẻ, nên đó là đáp án của bài toán.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	**Kết quả**
$\int_{-1}^{1} \sin x dx - \int_{-2}^{2} \sin x dx$	0
$\int_{-1}^{1} \cos x dx - \int_{-2}^{2} \cos x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1} e^x dx - \int_{-2}^{2} e^x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1} (x+1)dx - \int_{-2}^{2} (x+1)dx$	$\neq 0$

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Câu 8. Tích phân $I = \int_{2}^{5} \frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $\ln\frac{5}{2}$. B. $\frac{1}{3}\ln 3$. C. $3\ln 3$. D. $\ln\frac{2}{5}$.

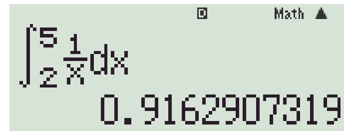
Hướng dẫn giải

[Cách 1: Phương pháp tự luận]

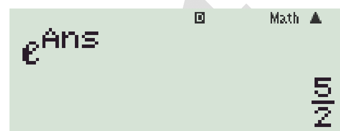
$$I=\int_2^5 \frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_2^5=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}.$$

[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị 0,91629...



Bước 2: Lấy $e^{0,91629...}$ cho kết quả $\frac{5}{2}$ → chọn $\ln\frac{5}{2}$.



[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_2^5 \frac{dx}{x}-\ln\frac{5}{2}$	0
$\int_2^5 \frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_2^5 \frac{dx}{x}-3\ln 3$	$\neq 0$
$\int_2^5 \frac{dx}{x}-\ln\frac{2}{5}$	$\neq 0$

→ chọn $\ln\frac{5}{2}$.

Câu 9. Tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2}\ln 3$. B. $2\ln 3$. C. $2\ln\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1: Phương pháp tự luận]

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)dx$$

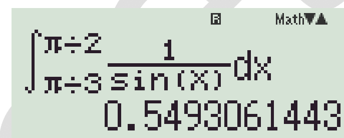
$$=\left[\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\left[\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=\ln\sqrt{3}.$$

[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,549306...$



Bước 2: Lấy $e^{0,549306...}$ cho kết quả $1,732050808...\approx\sqrt{3}$ → chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln 3$	0
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-2\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-2\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$

→ chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.

Nhận xét: Ở bài này cách làm bằng máy tính có vẻ nhanh hơn.

Câu 10. Nếu $\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx=K-2e$ thì giá trị của K là

A. 10. B. 9. C. 11. D. $12,5$.

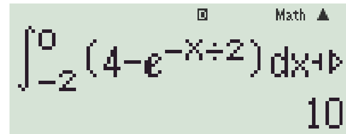
Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$K=\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e=\left(4x+2e^{-x/2}\right)\Big|_{-2}^{0}+2e=2-(-8+2e)+2e=10.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e$ như hình bên, thu được giá trị $K=10$.



Câu 11. Tích phân $I=\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx$ có giá trị bằng

A. $-\frac{2\ln 2}{3}$. B. $\frac{2\ln 2}{3}$. C. $-2\ln 2$. D. Không xác định.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

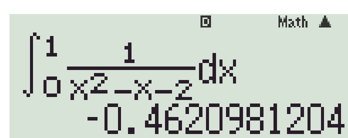
$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right]dx=\frac{1}{3}\left[\ln|x-2|-\ln|x+1|\right]\Big|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

Học sinh có thể áp dụng công thức $\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}dx=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$ để giảm **một** bước tính:

$$I=\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

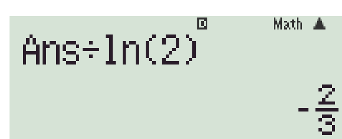
[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $-0.4620981...$



Bước 2: Loại đáp án dương $\frac{2\ln 2}{3}$ và loại đáp án nhiễu "Không xác định".

Bước 3: Chia giá trị $-0.4620981...$ cho $\ln 2$, nhận được $-\frac{2}{3}$



→ chọn $-\frac{2\ln 2}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^5 g(x)dx = -4$. Giá trị của $\int_1^5 [g(x) - f(x)]dx$ là

A. -6. B. 6. C. 2. D. -2.

Hướng dẫn giải

$$\int_1^5 [g(x) - f(x)]dx = \int_1^5 g(x)dx - \int_1^5 f(x)dx = -4 - 2 = -6.$$

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x - 2f(x)]dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 5. D. 7.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^3 [x - 2f(x)]dx = \int_0^3 xdx - 2\int_0^3 f(x)dx = \frac{9}{2} - 2 \times 2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 14. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. -5. B. 5. C. 9. D. -9.

Hướng dẫn giải

$$\int_3^5 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -7 + 2 = -5.$$

Câu 15. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$. B. $\int_1^3 e^x dx = (e^x)\Big|_1^3$.

C. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos xdx = (\sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$. D. $\int_1^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^2$.

Hướng dẫn giải

Phép tính $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$ là sai. Phép tính đúng là $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln|x|)\Big|_{-3}^{-2}$.

Câu 16. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$.

B. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a;b)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x) = F(x) + 5$ cũng thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Câu 17. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

Câu 18. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(a-b)$.

B. Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(b-a)$.

C. Nếu $f(x) \le M \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

D. Nếu $m \le f(x) \le M \ \forall x \in [a;b]$ thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(a-b)$.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề “Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(a-b)$” sai, mệnh đề đúng phải là

"Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(b-a)$".

Câu 19. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $g(x) \ne 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Xét các khẳng định sau:

I. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

II. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

III. $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$.

IV. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Trong các khẳng định trên, có bao nhiêu khẳng định **sai**?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Các công thức $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ và $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$ là sai.

Câu 20. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

A. $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

B. $3\int_0^{3\pi} \sin x dx$.

C. $\int_0^2 (x^2+x-3)dx$.

D. $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Tính rõ từng phép tính tích phân để tìm ra kết quả đúng (Chỉ tính đến khi nhận được kết quả đúng thì dừng lại):

- $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^{\ln\sqrt{10}} = \frac{e^{2\ln\sqrt{10}}-1}{2} = \frac{9}{2}$,

- $3\int_0^{3\pi} \sin x dx = -3\cos x\Big|_0^{3\pi} = 6$,
- $\int_0^2 (x^2 + x - 3)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 - 6 = -\frac{4}{3}$,
- $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+\pi)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(\sin 4\pi - \sin\pi) = 0$.

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$	0
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{3\pi} \sin x dx$	$-\frac{3}{2}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^2 (x^2+x-3)\, dx$	$\frac{35}{6}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$	$\frac{9}{2}$

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Với mọi hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

B. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[-3;3]$, luôn có $\int_{-3}^3 f(x)dx = 0$.

C. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, sao cho $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ thì $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$.

D. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[1;5]$ thì $\int\limits_1^5 [f(x)]^2\,dx = \left.\frac{[f(x)]^3}{3}\right|_1^5$.

Hướng dẫn giải

Vì $d(-x)=(-1)dx$ nên $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)(-1)dx = \int\limits_b^a f(x)d(-x)$.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_{-1}^0 f(x)dx$.

B. Nếu $\int\limits_{-1}^0 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

C. Nếu $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.

D. Nếu $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

- Hàm số $y = x^3 - \frac{x}{2}$ thỏa $\int\limits_{-1}^0 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = 0$, nhưng nó là hàm lẻ trên $[-1;1]$.
- Hàm số $y = x^2 - \frac{1}{3}$ thỏa $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = 0$, nhưng nó làm hàm chẵn trên $[-1;1]$.
- Còn khi f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ và suy ra

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = -\int\limits_0^1 f(x)(-1)dx = -\int\limits_0^1 f(x)d(-x)$$
$$= -\int\limits_0^1 f(-x)d(-x) = -\int\limits_0^{-1} f(t)dt = \int\limits_{-1}^0 f(t)dt.$$

Câu 23. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = x^6 \sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int\limits_1^2 x^6 \sin^5 x dx$ có giá trị bằng

A. $F(2) - F(1)$. B. $-F(1)$. C. $F(2)$. D. $F(1) - F(2)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a;b]$, ta có $\int\limits_1^2 x^6 \sin^5 xdx = F(2) - F(1)$.

Câu 24. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai số thực $a<b$. Nếu $\int_a^b f(x)dx=\alpha$ thì tích phân $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{\alpha}{2}$. B. 2α. C. α. D. 4α.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx$ và

x	$a/2$	$b/2$
t	a	b

Vậy $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_{a/2}^{b/2} f(2x)2dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt=\frac{\alpha}{2}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Phương pháp tự luận tốt hơn cả, nhưng nếu học sinh không nắm rõ, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[0;1]$ và tính toán.

Ví dụ $f(x)=x$ với $x\in[0;1]$. Khi đó

$$\alpha=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$

suy ra

$$\int_0^{1/2} f(2x)dx=\int_0^{1/2} 2xdx=\frac{1}{4}=\frac{\alpha}{2}.$$

Câu 25. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y=x^3\sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó tích phân $\int_1^2 81x^3\sin^5 3xdx$ có giá trị bằng

A. $F(6)-F(3)$. B. $3\left[F(6)-F(3)\right]$. C. $3\left[F(2)-F(1)\right]$. D. $F(2)-F(1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3x \Rightarrow dt=3dx$ và đổi cận

x	1	2

t	3	6

Vậy $\int\limits_1^2 81x^3\sin^5 3xdx = \int\limits_1^2 (3x)^3(\sin^5 3x)3dx = \int\limits_3^6 t^3\sin^5 tdt = F(6)-F(3)$.

Câu 26. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int\limits_0^2 f(x)dx = 6$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx$ là

A. 3. B. 6. C. -3. D. -6.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 2\sin x \Rightarrow dt = 2\cos xdx$ và

x	0	$\pi/2$
t	0	2

Vậy $\int\limits_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx = \int\limits_0^2 \frac{f(t)}{2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)dt = 3$.

Câu 27. Bài toán tính tích phân $I = \int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t = \ln x + 1$, suy ra $dt = \frac{1}{x}dx$ và

x	1	e
t	1	2

II. $I = \int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx = \int\limits_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt$

III. $I = \int\limits_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt = \left(\sqrt{t^5} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_1^2 = 1+3\sqrt{2}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai ở Bước III. B. Sai từ Bước II. C. Sai từ Bước I. D. Bài giải đúng.

Hướng dẫn giải

Bước III sai. Phép tính đúng là $I = \int\limits_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt = \left(\frac{2}{5}\sqrt{t^5} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

Câu 28. Xét tích phân $I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t=\cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây

A. $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$.

B. $I=\int_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$.

C. $I=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$.

D. $I=-\int_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $t=\frac{1}{2}$. Vậy

$$I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\pi/3}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}dx=-\int_1^{1/2}\frac{2t}{1+t}dt=\int_{1/2}^{1}\frac{2t}{1+t}dt.$$

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào luôn đúng?

A. $\int_a^b|f(x)|dx\ge\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

B. $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b|f(x)|dx$.

C. $\int_a^b|f(x)|dx>\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

D. $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b|f(x)|dx$.

Câu 30. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_0^1(1+x)^x dx=0$.

B. $\int_0^1\sin(1-x)dx=\int_0^1\sin xdx$.

C. $\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\pi/2}\sin xdx$.

D. $\int_{-1}^{1}x^{2017}(1+x)dx=\frac{2}{2019}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1: Tính trực tiếp các tích phân]

- Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow\int_0^1\sin(1-x)dx=-\int_1^0\sin tdt=\int_0^1\sin tdt$
- Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}dx\Rightarrow\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\int_0^{\pi/2}2\sin tdt$

- $\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx = \left(\frac{x^{2018}}{2018}+\frac{x^{2019}}{2019}\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^{2018}}{2018}+\frac{1^{2019}}{2019}\right)-\left(\frac{(-1)^{2018}}{2018}+\frac{(-1)^{2019}}{2019}\right)=\frac{2}{2019}$

Vậy $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$ sai.

[Cách 2: Nhận xét tích phân]

Ta thấy $(1+x)^x \geq 1$ với mọi $x \in [0;1]$ nên $\int_0^1 (1+x)^x dx \geq \int_0^1 1dx = 1$, vậy "$\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$" là khẳng định sai.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	**Kết quả**
$\int_0^1 (1+x)^x dx$	>0
$\int_0^1 \sin(1-x)dx - \int_0^1 \sin xdx$	0
$\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx - 2\int_0^{\pi/2} \sin xdx$	0
$\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx - \frac{2}{2019}$	0

suy ra $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$ là khẳng định sai.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

B. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx$.

C. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

D. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2\int_0^2 f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Với hàm số f bất kỳ và số thực dương a, ta luôn nằm lòng 2 tính chất sau đây:

- Nếu f là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,
- Nếu f là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Vậy trong bài này ta chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nếu học sinh không nắm rõ hai tính chất kể trên, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[-2;2]$ và tính toán. Ví dụ $f(x) = x$ với $x \in [-2;2]$. Khi đó

- $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_{0}^{2} f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq -2\int_{0}^{2} f(x)dx$.