Ví dụ 1.3 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

Lời giải.

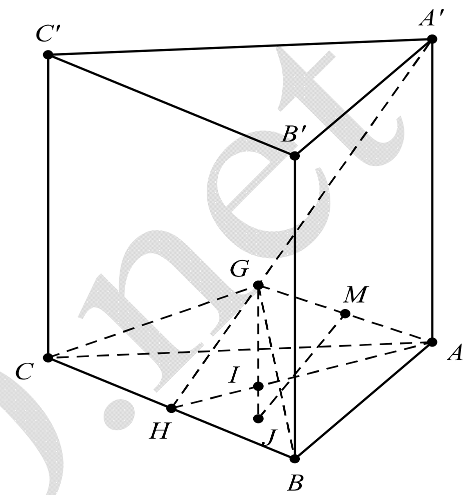
Gọi H là trung điểm của BC, theo giả thuyết ta có : $A'HA = 60^0$

Ta có : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, A'H = 2AH = a\sqrt{3}$

và $AA' = \frac{3a}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt).



Gọi I là tâm của tam giác ABC, suy ra $GI // AA' \Rightarrow GI \perp (ABC)$

Gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ suy ra J là giao điểm của GI với đường trung trực đoạn GA; M là trung điểm GA, nên có:

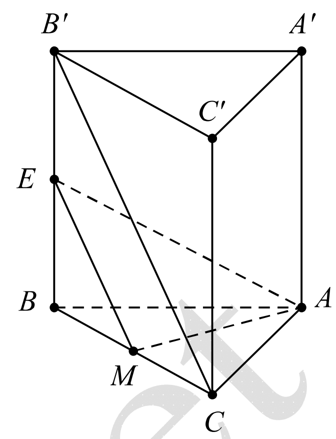
$$GM.GA = GJ.GI \Rightarrow R = GI = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}.$$

Ví dụ 2..3 Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, $B'C$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.

Thể tích khối lăng trụ là:



$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$ (đvtt).

Gọi E là trung điểm của BB'.

Khi đó mặt phẳng $(AME)//B'C$ nên

$d\left(AM, B'C\right) = d\left(B'C,(AME)\right) = d\left(C,(AME)\right)$.

Nhận thấy $d\left(C,(AME)\right) = d\left(B,(AME)\right) = h$

Do tứ diện $BAME$ có BA, BM, BE đôi một

vuông góc nên: $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BM^2} + \dfrac{1}{BE^2} = \dfrac{7}{a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

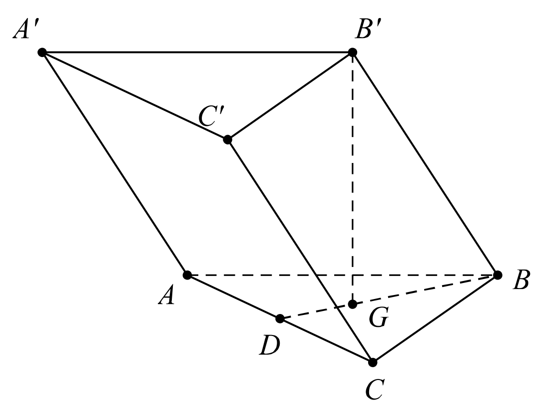
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Ví dụ 3.3 Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $BAC = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$ theo a.

Lời giải.

Gọi D là trung điểm AC,

G là trong tâm ΔABC



$\Rightarrow B'G \perp (ABC) \Rightarrow B'BG = 60^0$

$\Rightarrow B'G = BB'.\sin B'BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$BG = \dfrac{a}{2} \Rightarrow BD = \dfrac{3a}{4}$.

Trong ΔABC, ta có: $BC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$, $AC = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow CD = \dfrac{AB}{4}$

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{3AB^2}{4} + \frac{AB^2}{16} = \frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{3a\sqrt{13}}{13}, AC = \frac{3a\sqrt{13}}{26}; S_{\Delta ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}$$

Thể tích khối tứ diện $A'.ABC$:

$$V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3}B'G.S_{\Delta ABC} = \frac{9a^3}{208}.$$

Ví dụ 4.3 Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ và

$$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$$

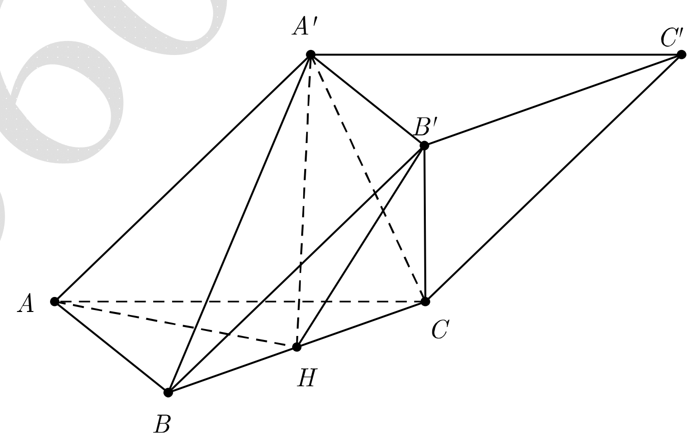
$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$$

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{3}$$

(đvtt).

Trong tam giác vuông $A'B'H$ có:



$HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác $B'BH$ cân tại B'.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì: $\varphi = B'BH$. Vậy $\cos\varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 5.3 Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng

(ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a. ***Đề thi ĐH Khối B – 2011***

Lời giải.

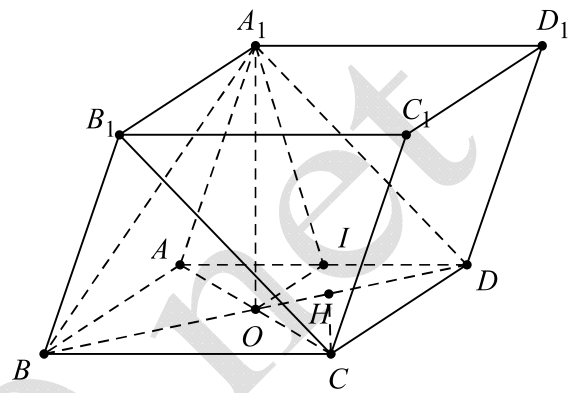
Gọi $O = AC \cap BD, I$ là trung điểm cạnh AD.

Ta có $AD \perp (AOI)$

$\Rightarrow A_1IO = \left((ADD_1A_1),(ABCD)\right) = 60^0$

Vì $OI = \dfrac{a}{2}$, suy ra $A_1I = 2OI = a$

$\Rightarrow A_1O = OI.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Do đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1O.S_{ABCD} = a.a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{2}$

Gọi B_2 là điểm chiếu của B_1 xuống mặt phẳng $(ABCD)$

$B_1C\,//\,A_1D \Rightarrow B_1C\,//(A_1BD) \Rightarrow d\left(B_1,(A_1BD)\right) = d\left(C,(A_1BD)\right) = CH$

Trong đó CH là đường cao của tam giác vuông BCD

Ta có: $CH = \dfrac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(B_1,(A_1BD)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.