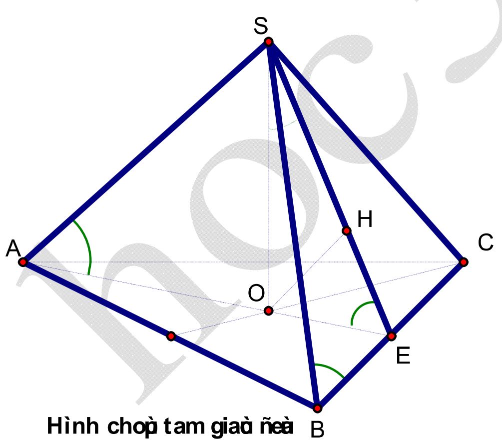
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Để tính thể tích khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ ta đi tính đường cao và diện tích đáy. Khi xác định chân đường cao của hình chóp cần chú ý:

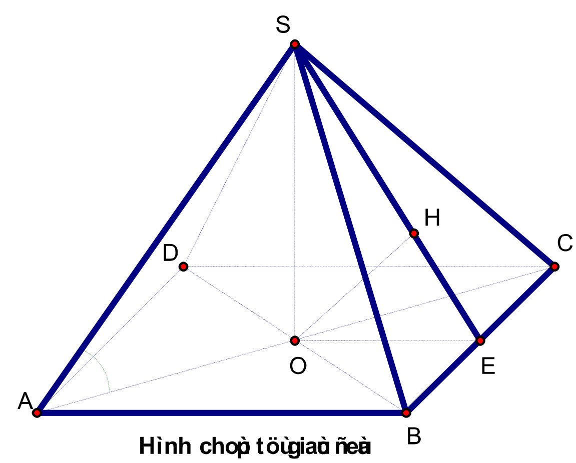
- Hình chóp đều thì chân của đường cao là tâm của đáy
- Hình chóp có mặt bên (SA_iA_k) vuông góc với mặt đáy thì chân đường cao cầu tam giác SA_iA_k hạ từ S là chân đường cao của hình chóp.
- Nếu có hai mặt phẳng đi qua đỉnh và cùng vuông góc với đáy thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó vuông góc với đáy.
- Nếu các cạnh bên của hình chóp bằng nhau thì hình chiếu của đỉnh là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Nếu các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau thì hình chiếu của đỉnh là tâm đường tròn nội tiếp đáy.

Chú ý: Hình chóp đều.

Khi giải các bài toán tính thể tích của khối chóp, diện tích xung quanh , diện tích toàn phần ,ta thường gặp các giả thiết về góc ,khoảng cách ,do đó cần xem lại các cách dựng góc giữa đường thẳng và mặt phẳng , góc giữa hai mặt phẳng , khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ,khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau….



Hình chóp tam giaù ñeàu



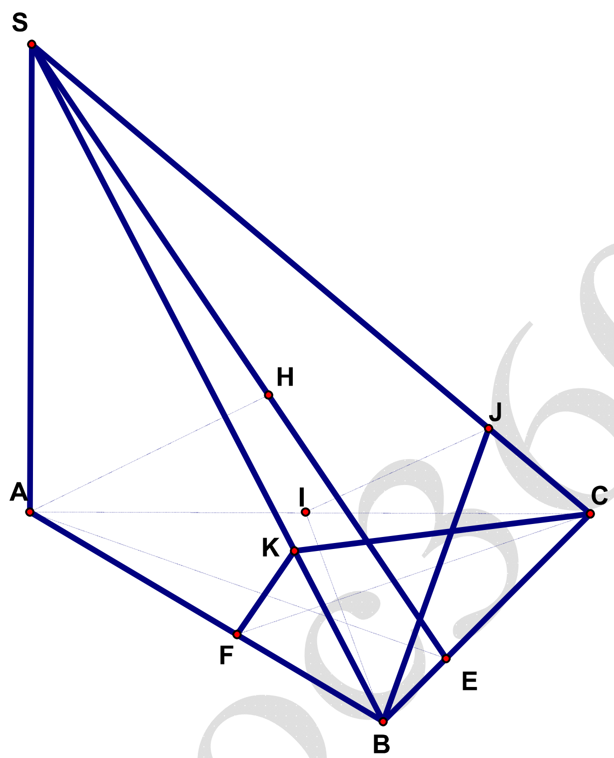
Hình chóp töù giaù ñeàu

- $SO = h =$ chiều cao của hình chóp .
- $\widehat{SAO}$ là góc giữa cạnh bên và đáy
- E là trung điểm của BC , $\widehat{SEO}$ là góc giữa mặt bên và đáy.

- SBC là góc ở đáy của một mặt bên.
- OSE là góc giữa SO và mặt bên.
- Dựng OH vuông góc với SE tại H thì OH là khoảng cách từ O đến mặt (SBC).

Chú ý: Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Dưới đây là một cách dựng các loại khoảng cách và các loại góc thường gặp trong một hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy .



* Xét hình chóp $S.ABC$ trong đó $SA \perp (ABC)$.

Dựng $AE \perp BC, (E \in BC)$, ta có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là SEA ,

$(SA,(SBC)) = ASE$,

$AE = d(SA, BC)$.

Dựng $AH \perp SE\ (H \in SE) \Rightarrow AH = d(A,(SBC))$.

$(SB,(ABC)) = SBA$, $(SC,(ABC)) = SCA$.

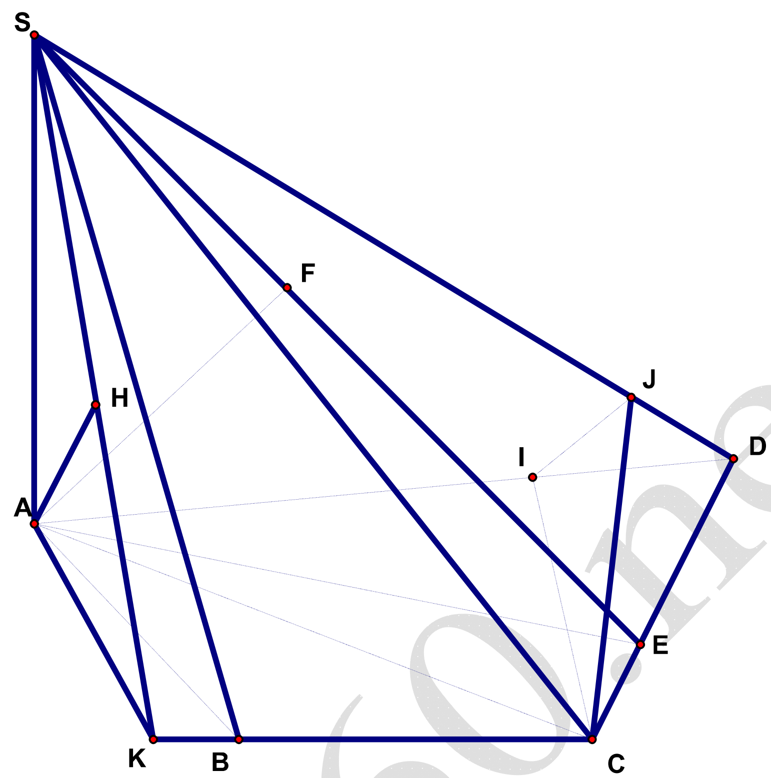
Dựng $CF \perp AB\ (F \in AB) \Rightarrow CF \perp (SAB) \Rightarrow CF = d(C,(SAB))$

Dựng $FK \perp SB\ (K \in SB) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là CKF.

Dựng $BI \perp AC\ (I \in AC) \Rightarrow BI = d(B,(SAC))$.

Dựng $IJ \perp SC\ (J \in SC) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là BJI .

*Xét hình chóp $S.ABCD$ trong đó $SA \perp (ABCD)$.



Dựng $AE \perp CD\left(E \in CD\right)$, $AK \perp BC\left(K \in BC\right)$

$\Rightarrow AK = d\left(SA,\ BC\right), AE = d\left(SA,\ CD\right), \left(\left(SCD\right),\left(ABCD\right)\right) = SEA, \left(\left(SBC\right),\left(ABCD\right)\right) = SKA$

Dựng $AH \perp SK\left(H \in SK\right)$, $AF \perp SE\left(F \in SE\right)$

$\Rightarrow AH \perp \left(SBC\right),\ AF \perp \left(SCD\right)$

$\Rightarrow AH = d\left(A,\left(SBC\right)\right),\ AF = d\left(A,\left(SCD\right)\right)$, $\left(\left(SBC\right),\left(SCD\right)\right) = \left(AH, AF\right)$.

Dựng $CI \perp AD\left(I \in AD\right) \Rightarrow CI = d\left(C,\left(SAD\right)\right)$

Dựng $IJ \perp SD\left(J \in SD\right) \Rightarrow \left(\left(SAD\right),\left(SCD\right)\right) = IJC$.

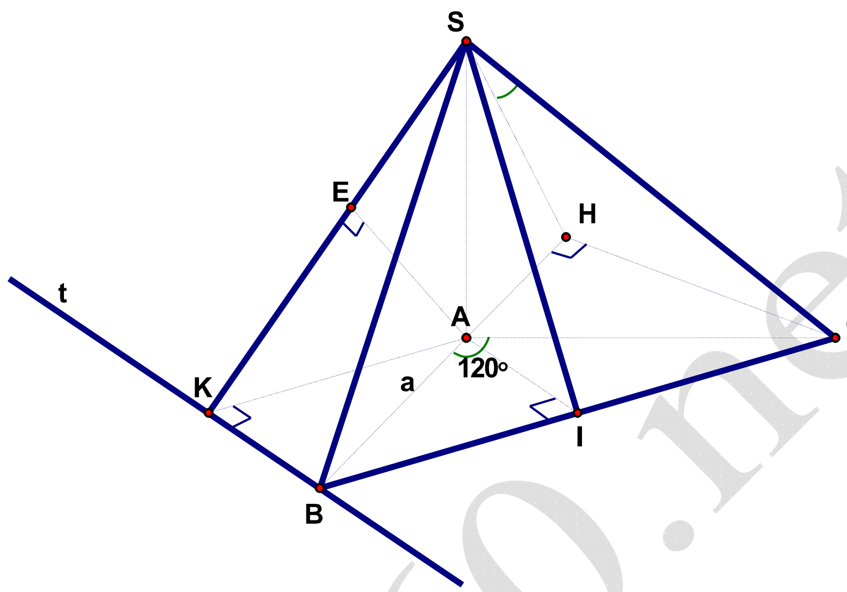
$d\left(C,\left(SAB\right)\right), \left(\left(SAB\right),\left(SBC\right)\right)$ được xác định tương tự như trên

Ví dụ 1. 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$, đáy ABC là tam giác cân có $AB = AC = a$, $BAC = 120^0$, góc giữa SC và mặt phẳng $\left(SAB\right)$ là 30^0.

1. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$;

2.Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SB.

Lời giải.



1.Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

$$\begin{cases}(SAB)\cap(SAC)=SA\\(SAB)\perp(ABC),(SAC)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)$$

Dựng $CH\perp AB$ tại H, khi đó $\begin{cases}CH\perp SA\\CH\perp AB\end{cases}\Rightarrow CH\perp(SAB)\Rightarrow hcSC/_{(SAB)}=SH$

$\Rightarrow(SC,(SAB))=(SC,SH)=CSH=30^0$ (giả thiết)

Trong tam giác vuông AHC:

$$AH=AC.\cos60^0=\frac{a}{2},CH=AC.\sin60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SHC (vuông tại S), $SH=CH.\cot30^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{3a}{2}$.

Trong tam giác vuông SAH (vuông tại A)

$$SA=\sqrt{SH^2-AH^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=a\sqrt{2}.$$

Diện tích tam giác

$$ABC:S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=\frac{a^2}{2}.\sin120^0=\frac{a^2}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Suy ra thể tích của khối chóp $S.ABC$.

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}.$$

2.Tính $d\left(AI,SB\right)$.

Dựng đường thẳng Bt song song với AI, ta có Bt vuông góc với BC và mặt phẳng $\left(S,Bt\right)$ là mặt phẳng chứa SB và song song với AI, suy ra

$d\left(SB,AI\right)=d\left(A,\left(S,Bt\right)\right)$.

Dựng BK vuông góc vơí Bt tại K, dựng AE vuông góc với SK tại K, khi đó ta có:

$$\begin{cases}Bt\perp SA\\ Bt\perp AK\end{cases}\Rightarrow Bt\perp\left(SAK\right)\Rightarrow Bt\perp\left(SAK\right)\Rightarrow Bt\perp AE.$$

$$\begin{cases}AE\perp Bt\\ AE\perp SK\end{cases}\Rightarrow AE\perp\left(S,Bt\right)\Rightarrow AE=d\left(A,\left(S,Bt\right)\right)=d\left(AI,SB\right).$$

Tứ giác $AKBI$ có $K=\hat{B}=\hat{I}=90^0$ nên là hình chữ nhật , suy ra

$$AK=IB=AB.\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SAK (vuông tại A), ta có

$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{11}{6a^2}\Rightarrow AE=\frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Vậy $d\left(AI,SB\right)=\frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Ví dụ 2. 2 Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh bằng a, đường cao SH.

1. Chứng minh SA vuông góc với BC;

2. Tính thể tích của khối chóp $SABC$;

3. Gọi O là trung điểm của đoạn SH. Chứng minh rằng OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau.

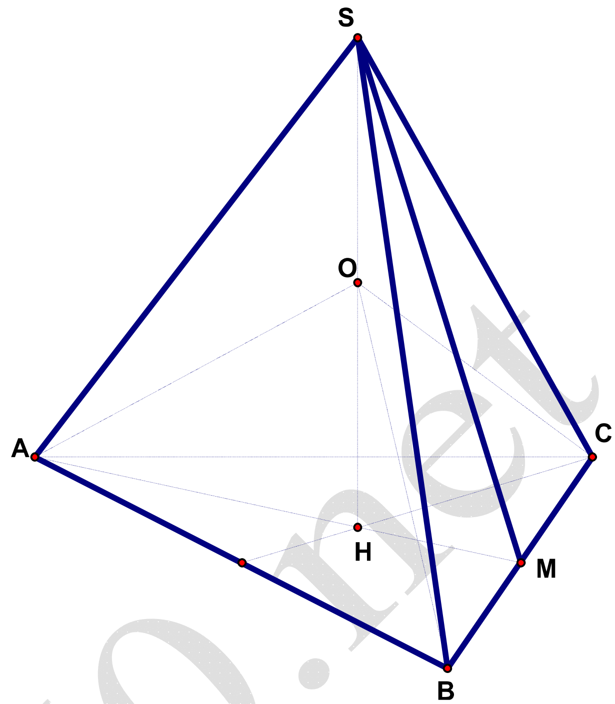
Lời giải.

1. Chứng minh $SA \perp BC$ **.**

Gọi M là trung điểm của cạnh BC, vì các tam giác ABC, SBC là các tam giác đều

nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SA.$



2. Tính V_{SABC} .

Theo tính chất của hình chóp đều ta có H là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow H \in AM$,

$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH.$

Trong tam giác vuông SHA (vuông tại H) ,

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Thể tích của khối chóp $SABC$: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

3. Chứng minh OA, OB, OC đôi một vuông góc .

O thuộc trục SH của tam giác ABC nên $OA = OB = OC$.

Trong tam giác vuông OHA , $OA^2 = AH^2 + OH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

Trong tam giác cân OAB : $OA^2 + OB^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O , tức là $OA \perp OB$.

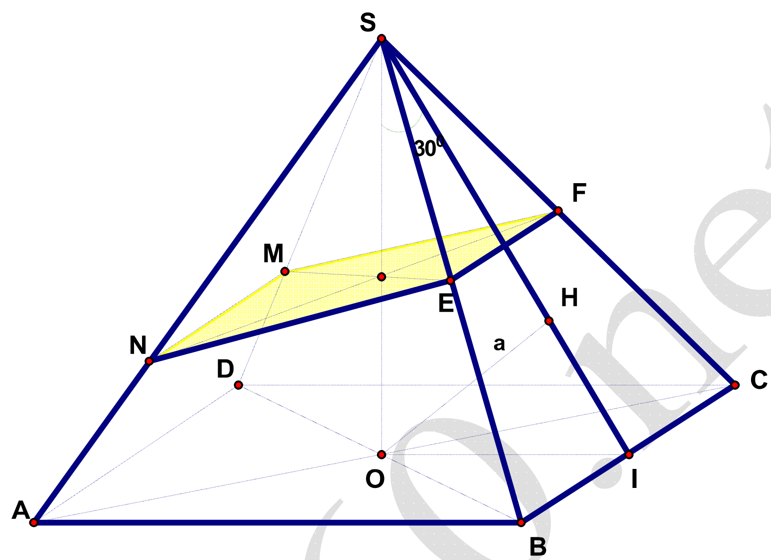
Chứng minh tương tự ta có OA, OB, OC đôi một vuông góc .

Ví dụ 3. 2 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt bên là a , góc giữa đường cao và mặt bên là 30^0 .

1. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$;

2. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC; M là điểm trên cạnh SD sao cho $MS = 2MD$. Mặt phẳng (MEF) cắt SA tại N. Tính thể tích của khối chóp $S.EFMN$

Lời giải.



1.Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Gọi I là trung điểm của cạnh BC, ta có $BC \perp (SOI)$ (do $BC \perp OI, BC \perp SO$), suy ra $(SBC) \perp (SOI)$.

Dựng $OH \perp SI (S \in I)$ thì $OH \perp (SBC)$ và hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên mặt phẳng (SBC) là đường thẳng SI, do đó $OH = d(O,(SBC)) = a$ và $(SO,(SBC)) = OSI = 30^0$ (giả thiết).

Trong tam giác vuông SOE, $SO = \dfrac{OH}{\sin 30^0} = 2a$, $OI = SO \tan 30^0 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $AB = 2OI = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích của khối chóp

$$S.ABCD : V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3} AB^2.SO = \frac{1}{3}\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2 .2a = \frac{32a^3}{9}.$$

2.Tính thể tích của khối chóp $S.EFMN$

EF là đường trung bình trong tam giác SBC nên $EF // BC$ suy ra $EF // AD$ (do $AD // BC$).

$$\begin{cases} EF \,/\!/\, AD \\ EF \subset (MEF), AD \subset (SAD) \Rightarrow MN \,/\!/\, EF \,/\!/\, AD \Rightarrow \dfrac{SN}{SA} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{1}{3} \\ (MEF) \cap (SAD) = MN \end{cases}$$

Ta có : $V_{S.BCD} = V_{S.ABD} = \dfrac{1}{2} V_{S.ABCD}$.

$$\frac{V_{S.EFM}}{V_{S.BCD}} = \frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC}.\frac{SM}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{12} \Rightarrow V_{S.EFM} = \frac{1}{12} V_{S.BCD} = \frac{1}{24} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.EMN}}{V_{S.BDA}} = \frac{SE}{SB}.\frac{SM}{SD}.\frac{SN}{SA} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{S.EMN} = \frac{1}{18} V_{S.BDA} = \frac{1}{36} V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{S.EFMN} = V_{S.EFM} + V_{S.EMN} = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{36}\right) V_{S.ABCD} = \frac{5}{72} V_{S.ABCD} = \frac{5}{72}.\frac{32a^3}{9} = \frac{20a^3}{81}.$$

Ví dụ 4. 2 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $SBC = 30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo *a*.

Đề thi ĐH Khối D – 2011

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S xuống BC. Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên

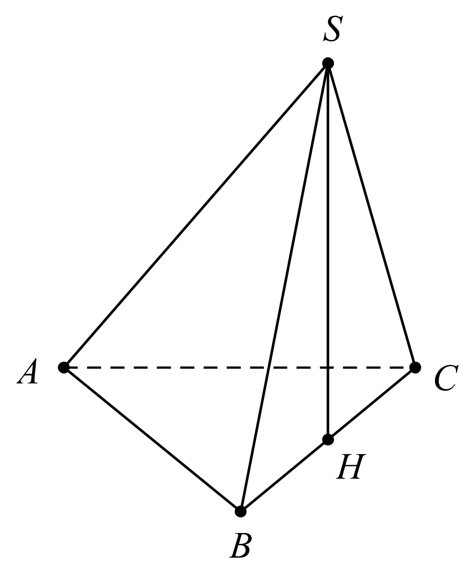
$SH \perp (ABC)$. Ta có $SH = a\sqrt{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{\Delta ABC} = 2a^3\sqrt{3}$

Ta có tam giác SAC vuông tại S.

Vì $SA = a\sqrt{21}, SC = 2a, AC = 5a$ và $S_{\Delta SAC} = a^2\sqrt{21}$ nên ta có được

$$d\left(B,(SAC)\right) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}.$$



Ví dụ 5. 2 Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng *(SAB)* và *(SAC)* cùng vuông góc với mặt phẳng *(ABC)*. Gọi *M* là trung điểm của AB; mặt phẳng *SM* và song song với *BC*, cắt *AC* tại *N*. Biết góc giữa hai mặt phẳng *(SBC)* và *(ABC)* bằng 60°. Tính thể tích khối chóp *S.BCNM* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *SN* theo *a* ***Đề thi ĐH Khối A – 2011***

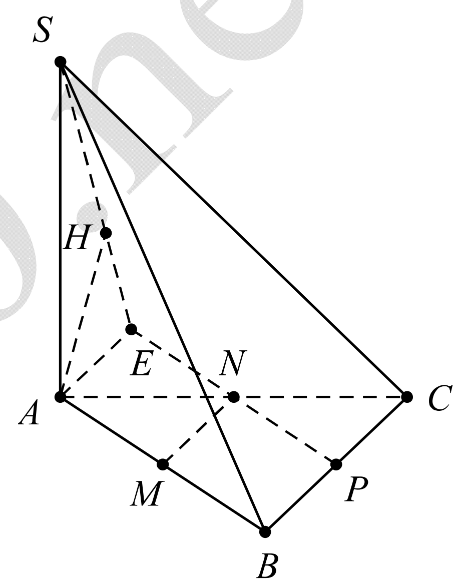
Lời giải.

Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp (ABC)$, hay SA là đường cao của khối chóp $S.BCNM$.

Ta có : $S_{BCNM} = S_{ABC} - S_{AMN}$

$$= 2a^2 - \frac{1}{2}MA.MN = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp BC$.



Nên SBA chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), thế thì theo giả thiết ta có $SBA = 60^0$.

Trong tam giác vuông SAB ta có $SA = AB\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SA.S_{BCNM} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = \sqrt{3}a^3\,(dvtt)$

Gọi P là trung điểm của BC thì $AB // NP, AB \not\subset (SPN)$ nên $AB // (SPN)$ do đó $d(AB, SN) = d(AB;(SPN)) = d(A;(SPN))$

Từ A hạ $AE \perp NP, E \in PN$ thì $\begin{cases} PN \perp AE \\ PN \perp SA \end{cases} \Rightarrow PN \perp (SAE)$;

Hạ $AH \perp SE$ thì $AH \perp (SPN) \Rightarrow d(A;(SPN)) = AH$.

Ta có $AE = NP = a; SA = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{13}{12a^2}$

$\Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{12}{13}}$. Vậy $d\left(A;\left(SPN\right)\right) = a\sqrt{\frac{12}{13}}$.

Ví dụ 6.2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SAC) và (SCD) tạo với đáy lần lượt các góc 60^0 và 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

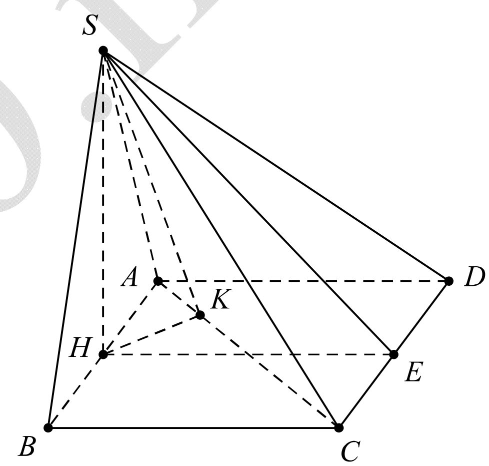
Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD}$

Vẽ $HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow SKH$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt đáy nên $SKH = 60^0$.

Vẽ $HE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow SEH$ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(SCD\right)$ và mặt đáy nên $SEH = 30^0$.

Đặt $AB = x$, trong tam giác SHE ta



có: $SH = HE.\tan 30^0 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ (1)

Ta có $\Delta AKH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{KH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow KH = \frac{ax}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$

Trong tam giác SHK ta có: $SH = HK \tan 60^0 = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V = \frac{1}{3} SH.AB.AD = \frac{1}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{3}.a.x = \frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$$