1. Cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng $\sqrt{2}$

2. Cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;0;1)$

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C và tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC

b) Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$

Lời giải.

1. Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$ là VTPT, mp(Q) có $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;1)$ là VTPT.

Do $\begin{cases}(R)\perp(P)\\(R)\perp(Q)\end{cases} \Rightarrow mp(R)$ có $\overrightarrow{n_R}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(1;0;-1)$ là VTPT

Suy ra $(R): x-z+m=0$

Ta có $d(O;(R))=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+0+1}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy $(R): x-z\pm 2=0$.

2. a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1), \overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;-8)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Phương trình $mp(ABC): x+2y-4z+6=0$.

Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow H\in(ABC) \Rightarrow a+2b-4c+6=0$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{CH}=(a;b-1;c-2), \ \overrightarrow{BH}=(a-2;b+2;c-1)$

Vì $\begin{cases}CH\perp AB\\BH\perp AC\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-3b-c+5=0\\2a+b+c-3=0\end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=0; b=1; c=2$.

Vậy $H(0;1;2)$.

b) Giả sử $M(a;b;c)\in(P) \Rightarrow 2a+2b+c-3=0$ (3)

Do $\begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MB^2 = MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b-4c+5 = -4a+4b-2c+9 \\ -4a+4b-2c+9 = 4a-2c+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b-c=2 \\ 2a-b=1 \end{cases}$ (4).

Từ (3) và (4) ta tìm được: $a=2; b=3; c=-7$

Vậy $M(2;3;-7)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 5.2.6 Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;0;0)$, $M(0;-3;6)$.

1. Chứng minh rằng mặt phẳng $(P): x+2y-9=0$ tiếp xúc với mặt cầu tâm M bán kính MO. Tìm toạ độ tiếp điểm ?

2. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, M và cắt các trục Oy, Oz tại các điểm tương ứng B, C sao cho $V_{OABC} = 3$

Lời giải.

1. Ta có $OM = 3\sqrt{5}$

Do $d(M,(P)) = \dfrac{|2.(-3)-9|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 3\sqrt{5} = OM$, suy ra (P) tiếp xúc với mặt cầu tâm bán kính OM.

Gọi $H(a;b;c)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow H \in (P) \Rightarrow a+2b-3=0$ (1)

Mặt khác $OH \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{OH} // \overrightarrow{n_P} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = t \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t; b=2t \\ c=0 \end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $t+4t-3=0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{5}$. Vậy $H\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$.

2. Giả sử $B(0;b;0), C(0;0;c)$. Vì $mp(Q)$ đi qua A, B, C nên phương trình của : $(Q): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì $M \in (Q) \Rightarrow \dfrac{-3}{b}+\dfrac{6}{c}=1 \Rightarrow c = \dfrac{6b}{b+3}$ (2)

Khi đó: $V_{OABC} = \dfrac{1}{3}OA.OB.OC = \dfrac{1}{6}.2.|bc| = 3 \Rightarrow |bc| = 9$ (3)

Thay (2) vào (3) ta có: $2b^2 = 3|b+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2b^2 - 3b - 9 = 0 \\ 2b^2 + 3b + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

- $b = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow (Q): \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y + 2z - 6 = 0$.
- $b = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow c = -6 \Rightarrow (Q): 3x - 4y - z - 6 = 0$.

Ví dụ 6.2.6 Viết phương trình mặt phẳng (α) biết:
1. (α) đi qua $A(1;-1;1), B(2;0;3)$ và (α) song song với Ox;
2. (α) đi qua $M(3;0;1)$, $N(6;-2;1)$ và (α) tạo với (Oyz) một góc φ thỏa $\cos\varphi = \dfrac{2}{7}$.

Lời giải.
1. Vì (α) song song với Ox nên phương trình của (α) có dạng:
$$ay + bz + c = 0$$
Do $A, B \in (\alpha)$ nên ta có: $\begin{cases} -a + b + c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3b \\ a = -2b \end{cases}$, chọn
$b = -1 \Rightarrow a = 2, c = 3$
Vậy phương trình của $(\alpha): 2y - z + 3 = 0$.
2. Vì $M \in (\alpha)$ nên phương trình của (α) có dạng:
$$a(x-3) + by + c(x-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cx - 3a - c = 0 \quad (1)$$
Do $N \in (\alpha) \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow b = \dfrac{3}{2}a$
Mặt khác $\cos\varphi = \dfrac{2}{7}$ và $\vec{i} = (1;0;0)$ là VTPT của (Oyz) nên ta có:
$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 49a^2 = 4\left[a^2 + \frac{9}{4}a^2 + c^2\right] = 13a^2 + 4c^2 \Leftrightarrow c = \pm 3a$$
Ta chọn $a = 2 \Rightarrow b = 3, c = \pm 6$.
Từ đó ta có phương trình của (α) là:
$$2x + 3y + 6z - 12 = 0 \text{ hoặc } 2x + 3y - 6z = 0.$$
CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP
Bài 1 Lập phương trình mặt phẳng (P) biết:
1. (P) đi qua $A(1;2;3), B(4;-2;-1), C(3;-1;2)$;

2. (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AC (Với A, C ở câu 1);

3. (P) đi qua $M(0;0;1), N(0;2;0)$ và song song với AB ;

4. (P) đi qua các hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ.

Bài 2 Cho hai mặt phẳng có phương trình

$$(\alpha): x-y+z-4=0 \ \& \ (\beta): 3x-y+z-1=0.$$

Lập phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ và mặt phẳng (P)

1. Qua điểm $A(1;8;2)$.

2. Vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+8y+z+2=0$.

3. Tạo với (R): $x+2y-2z+1=0$ góc φ với $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{33}}$.

Bài 3 Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:

1. (α) đi qua $M(2;3;1)$ và song song với mp $(P): x-2y+3z-1=0$;

2. (α) đi qua $A(2;1;1), B(-1;-2;-3)$ và (α) vuông góc với $(\beta): x+y+z=0$;

3. (α) chứa trục Ox và vuông góc với $(Q): 2x+3y-z+2=0$.

4. (α) qua ba điểm $A(2;8;5), B(18;14;0), C(12;8;3)$.

5. (α) là mặt phẳng trung trực của EF với $E(5;2;7)$, $F(1;8;1)$.

6. (α) qua $D(2;3;5)$ và song song với mặt phẳng (Oyz).

7. (α) qua $G(1;-3;2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$$(\beta): \ x+2y-5z+1=0, \ (\gamma): \ 2x-3y-z+4=0.$$

8. (α) qua các hình chiếu của điểm $H(-2;1;5)$ trên các trục tọa độ.

Bài 4 . Lập phương trình của (P) trong các trương hợp sau:

1. (P) đi qua $A(1;2;1)$ và song song với $(Q): x+y+3z-1=0$;

2. (P) đi qua $M(0;1;2)$, $N(0;1;1)$, $E(2;0;0)$;

3. (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN (M, N ở ý 2) ;

4. (P) đi qua các hình chiếu của $A(1;2;3)$ lên các trục tọa độ ;

5. (P) đi qua $B(1;2;0)$, $C(0;2;0)$ và vuông góc với (R): $x+y+z+1=0$;

6. (P) đi qua $D(-1;2;3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng :