II. VÍ DỤ MINH HỌA :

Dạng 1: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU**

Phương pháp:

* **Thuật toán 1**: Bước 1: Xác định tâm $I(a;b;c)$.

P Bước 2: Xác định bán kính R của (*S*).

Bước 3: Mặt cầu (*S*) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

$$\boxed{(S):\quad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

* **Thuật toán 2:** Gọi phương trình $\boxed{(S):\ x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$

Phương trình (S) *hoàn toàn xác định* nếu biết được $a,\ b,\ c,\ d$. ($a^2+b^2+c^2-d>0$)

Bài tập 1 : Viết phương trình mặt cầu (*S*), trong các trường hợp sau:

a) (S) có tâm $I(2;2;-3)$ và bán kính $R=3$.

b) (S) có tâm $I(1;2;0)$ và (*S*) qua $P(2;-2;1)$.

c) (S) có đường kính AB với $A(1;3;1)$, $B(-2;0;1)$.

Bài giải:

a) Mặt cầu tâm $I(2;2;-3)$ và bán kính $R=3$, có phương trình:

(*S*): $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$

b) Ta có: $\overrightarrow{IP}=(1;-4;1)\Rightarrow IP=3\sqrt{2}$.

Mặt cầu tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R=IP=3\sqrt{2}$, có phương trình:

(*S*): $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=18$

c) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;0)\Rightarrow AB=3\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$.

Mặt cầu tâm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$ và bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, có phương trình:

(*S*): $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{9}{2}$.

Bài tập 2 : Viết phương trình mặt cầu (S), trong các trường hợp sau:

a) (S) qua $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ và tâm I thuộc trục Ox.

b) (S) có tâm O và tiếp xúc mặt phẳng (α): $16x-15y-12z+75=0$.

c) (S) có tâm $I(-1;2;0)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-3}$.

Bài giải:

a) Gọi $I(a;0;0)\in Ox$. Ta có : $\overrightarrow{IA}=(3-a;1;0)$, $\overrightarrow{IB}=(5-a;5;0)$.

Do (S) đi qua A, $B \Leftrightarrow IA=IB \Leftrightarrow \sqrt{(3-a)^2+1}=\sqrt{(5-a)^2+25} \Leftrightarrow 4a=40 \Leftrightarrow a=10$

$\Rightarrow I(10;0;0)$ và $IA=5\sqrt{2}$.

Mặt cầu tâm $I(10;0;0)$ và bán kính $R=5\sqrt{2}$, có phương trình (S) : $(x-10)^2+y^2+z^2=50$

b) Do (S) tiếp xúc với $(\alpha) \Leftrightarrow \mathrm{d}(O,(\alpha))=R \Leftrightarrow R=\dfrac{75}{25}=3$.

Mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=3$, có phương trình (S) : $x^2+y^2+z^2=9$

c) Chọn $A(-1;1;0)\in\Delta \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(0;-1;0)$.

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=(-1;1;-3)$. Ta có: $\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}_\Delta\right]=(3;0;-1)$.

Do (S) tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,\Delta)=R \Leftrightarrow R=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}_\Delta\right]\right|}{\left|\vec{u}_\Delta\right|}=\dfrac{\sqrt{10}}{11}$.

Mặt cầu tâm $I(-1;2;0)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{10}}{11}$, có phương trình (S) : $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=\dfrac{10}{121}$.

Bài tập 3 : Viết phương trình mặt cầu (S) biết :

a) (S) qua bốn điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$.

b) (S) qua $A(0;8;0)$, $B(4;6;2)$, $C(0;12;4)$ và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz).

Bài giải:

a) **Cách 1:** Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 7z = -2 \\ y - 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Do đó: $I(-2;1;0)$ và $R = IA = \sqrt{26}$. Vậy (S) : $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

Cách 2: Gọi phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

Do $A(1;2;-4) \in (S) \Leftrightarrow \quad -2a - 4b + 8c + d = -21 \quad (1)$

Tương tự: $B(1;-3;1) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b - 2c + d = -11 \quad (2)$

$C(2;2;3) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 6c + d = -17 \quad (3)$

$D(1;0;4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 8c + d = -17 \quad (4)$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có $a,\ b,\ c,\ d$, suy ra phương trình mặt cầu (S) :

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26.$$

b) Do tâm I của mặt cầu nằm trên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow I(0;b;c)$.

Ta có: $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$.

Vậy $I(0;7;5)$ và $R = \sqrt{26}$. Vậy (S): $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$.

Bài tập 4: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α): $x + 2y + 2z + 3 = 0$ và (β): $x + 2y + 2z + 7 = 0$.

Bài giải:

Gọi $I(t;-1;-t) \in \Delta$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết: $d(I,(\alpha)) = d(I,(\beta)) \Leftrightarrow \dfrac{|1-t|}{3} = \dfrac{|5-t|}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - t = 5 - t \\ 1 - t = t - 5 \end{array}\right. \Rightarrow t = 3$.

Suy ra: $I(3;-1;-3)$ và $R = \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \dfrac{2}{3}$. Vậy (S) : $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \dfrac{4}{9}$.

Bài tập 5: Lập phương trình mặt cầu (*S*) qua 2 điểm $A(2;6;0)$, $B(4;0;8)$ và có tâm thuộc d : $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+5}{1}$.

Bài giải:

Ta có $d:\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=-5+t \end{cases}$. Gọi $I(1-t;2t;-5+t)\in d$ là tâm của mặt cầu (*S*) cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{IA}=(1+t;6-2t;5-t)$, $\overrightarrow{IB}=(3+t;-2t;13-t)$.

Theo giả thiết, do (*S*) đi qua *A, B* $\Leftrightarrow$ *AI = BI*

$\Leftrightarrow \sqrt{(1+t)^2+(6-2t)^2+(5-t)^2}=\sqrt{(3+t)^2+4t^2+(13-t)^2}$

$\Leftrightarrow 62-32t=178-20t \Leftrightarrow 12t=-116 \Leftrightarrow t=-\frac{29}{3}$

$\Rightarrow I\left(\frac{32}{3};-\frac{58}{3};-\frac{44}{3}\right)$ và $R=IA=2\sqrt{233}$. Vậy (S): $\left(x-\frac{32}{3}\right)^2+\left(y+\frac{58}{3}\right)^2+\left(z+\frac{44}{3}\right)^2=932$.

Bài tập 6: Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm $I(2;3;-1)$ và cắt đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{1}$ tại hai điểm *A, B* với $AB=16$.

Bài giải:

Chọn $A(-1;1;0)\in\Delta\Rightarrow\overrightarrow{IA}=(-3;-2;1)$. Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=(1;-4;1)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}_\Delta\right]=(2;4;14)\Rightarrow \mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}_\Delta\right]\right|}{|\vec{u}_\Delta|}=2\sqrt{3}$.

Gọi *R* là bán kính mặt cầu (*S*). Theo giả thiết : $R=\sqrt{\left[\mathrm{d}(I,\Delta)\right]^2+\frac{AB^2}{4}}=2\sqrt{19}$.

Vậy (*S*): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=76$.

Bài tập 7: Cho hai mặt phẳng (P): $5x-4y+z-6=0$, (Q): $2x-y+z+7=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{7}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm *I* là giao điểm của (*P*) và Δ sao cho (*Q*) cắt (*S*) theo một hình tròn có diện tích là 20π.

Bài giải:

Ta có $\Delta:\begin{cases}x=1+7t\\y=3t\\z=1-2t\end{cases}$. Tọa độ *I* là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=1+7t & (1)\\y=3t & (2)\\z=1-2t & (3)\\5x-4y+z-6=0 & (4)\end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $5(1+7t)-4(3t)+(1-2t)-6=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow I(1;0;1)$.

Ta có : $d\left(I,(Q)\right)=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.

Gọi *r* là bán kính đường tròn giao tuyến của (*S*) và mặt phẳng (*Q*). Ta có: $20\pi=\pi r^2\Leftrightarrow r=2\sqrt{5}$.

R là bán kính mặt cầu (*S*) cần tìm.

Theo giả thiết: $R=\sqrt{\left[d\left(I,(Q)\right)\right]^2+r^2}=\dfrac{\sqrt{330}}{3}$. Vậy (*S*) : $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{110}{3}$.

Bài tập 8: Cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=2t-1\\z=t+2\end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (*S*) có tâm *I* thuộc d và *I* cách (*P*) một khoảng bằng 2 và (*S*) cắt (*P*) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3.

Bài giải:

Gọi $I(-t;2t-1;t+2)\in d$: là tâm của mặt cầu (*S*) và *R* là bán kính của (*S*).

Theo giả thiết : $R=\sqrt{\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2+r^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Mặt khác: $d\left(I;(P)\right)=2\Leftrightarrow\dfrac{|-2t-2t+1-2t-4-2|}{\sqrt{4+1+4}}=2\Leftrightarrow|6t+5|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{6}\\t=-\dfrac{11}{6}\end{array}\right.$

* Với $t=\dfrac{1}{6}$: Tâm $I_1\left(-\dfrac{1}{6};-\dfrac{2}{3};\dfrac{13}{6}\right)$, suy ra (S_1): $\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{13}{6}\right)^2=13$.

* Với $t=-\dfrac{11}{6}$: Tâm $I_2\left(\dfrac{11}{6};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{6}\right)$, suy ra (S_2): $\left(x-\dfrac{11}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{6}\right)^2=13$.

Bài tập 9: Cho điểm $I(1;0;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (*S*) tâm *I* và cắt d tại hai điểm *A, B* sao cho ΔIAB vuông tại *I*.

Bài giải :

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$ và $P(1;-1;1)\in d$.

Ta có: $\overrightarrow{IP}=(0;-1;-2)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]=(0;-4;-2)$. Suy ra: $\mathrm{d}(I;d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{20}}{3}$.

Gọi R là bán kính của (S). Theo giả thiết, ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{2}{R^2}\Leftrightarrow R=\sqrt{2}IH=\sqrt{2}\mathrm{d}(I,d)=\frac{\sqrt{40}}{3}$$

Vậy (S) : $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{40}{9}$.

Bài tập 10: (**Khối A- 2011**) Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Bài giải :

(S) có tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R=2\sqrt{3}$. *Nhận xét:* điểm O và A cùng thuộc (S).

Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R'=\dfrac{OA}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Khoảng cách : $d(I;(P))=\sqrt{R^2-(R')^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Mặt phẳng (P) đi qua O có phương trình dạng : $ax+by+cz=0\ \left(a^2+b^2+c^2>0\right)\ (*)$

Do (P) đi qua A, suy ra: $4a+4b=0\Leftrightarrow b=-a$.

Lúc đó: $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}}\Rightarrow\dfrac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 2a^2+c^2=3c^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=a\\c=-1\end{array}\right.$. Theo (*), suy ra $(P):x-y+z=0$ hoặc $x-y-z=0$.

Chú ý: *Kỹ năng xác định tâm và bán kính của đường tròn trong không gian.*

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R. Mặt phẳng (P) cắt (S) theo một đường tròn (C).

Bước 1: Lập phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Bước 2: Tâm I' của đường tròn (C) là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Bước 3: Gọi r là bán kính của (C): $\boxed{r=\sqrt{R^2-\left[d(I;(P))\right]^2}}$

Bài tập 11: Chứng minh rằng: Mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ cắt mặt phẳng (P): $x-2=0$ theo giao tuyến là một đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của (C).

Bài giải :

* Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có : $\mathrm{d}(I,(P))=1<2=R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là 1 đường tròn. (đ.p.c.m)

* Đường thẳng d qua $I(1;0;0)$ và vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_P=(1;0;0)$ làm 1 vectơ chỉ phương, có phương trình $d:\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

\+ Tọa độ tâm $I^{/}$ đường tròn là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=0\\x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=0\\z=0\end{cases} \Rightarrow I^{/}(2;0;0)$.

\+ Ta có: $d(I,(P))=1$. Gọi r là bán kính của (C), ta có : $r=\sqrt{R^2-\left[d(I,(P))\right]^2}=\sqrt{3}$.

Dạng 2 : **SỰ TƯƠNG GIAO VÀ SỰ TIẾP XÚC**

Phương pháp: * **Các điều kiện tiếp xúc**:

\+ Đường thẳng Δ là *tiếp tuyến* của (S) $\Leftrightarrow$ $d(I;\Delta)=R$.

\+ Mặt phẳng (α) là *tiếp diện* của (S) $\Leftrightarrow$ $d(I;(\alpha))=R$.

* *Lưu ý các dạng toán liên quan như tìm tiếp điểm, tương giao.*

Bài tập 1: Cho đường thẳng $(\Delta):\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là :

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Bài giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(0;1;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{MI}=(1;-1;-4)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(-5;7;-3)\Rightarrow d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{498}}{6}$

Vì $d(I,\Delta)>R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S).

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 2: Cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=\sqrt{10}$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2(z+3)^2=10$.
D. $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=9$.

Bài giải:

Gọi M là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên Oy, ta có : $M(0;-2;0)$.

$\overrightarrow{IM}=(-1;0;-3)\Rightarrow R=d(I,Oy)=IM=\sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=10$.

Lựa chọn đáp án **B**.

Bài tập 3: Cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d là:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=50$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5\sqrt{2}$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=5\sqrt{2}$.
D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$.

Bài giải:

Đường thẳng (d) đi qua $I(-1;2;-3)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;1;-1)\Rightarrow d(A,d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=5\sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2+(y+2)^2(z-3)^2=50$.

Lựa chọn đáp án **D**.

Bài tập 4: Mặt cầu (S) tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $d:\dfrac{x-11}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+25}{-2}$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB=16$ có phương trình là:

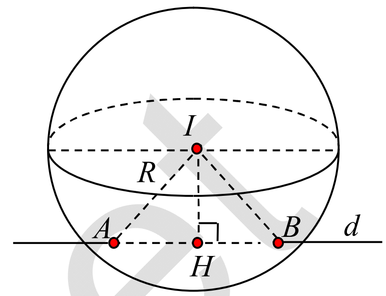
A. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$.
B. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=289$.
C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.
D. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=280$.

Bài giải:

Đường thẳng (d) đi qua $M(11;\ 0;-25)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;-2)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Ta có:

$$IH=d(I,AB)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=15\ \Rightarrow R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=17.$$



Vậy (S) : $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289.$

Lựa chọn đáp án **C**.

Bài tập 5: Cho đường thẳng $d:\frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z}{1}$ và điểm $I(4;1;6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm *I*, tại hai điểm *A, B* sao cho $AB=6$. Phương trình của mặt cầu (S) là:

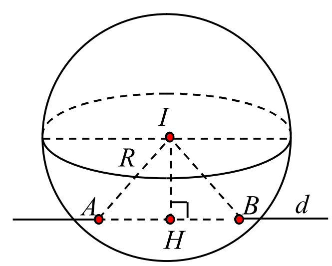
A. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18.$ B. $(x+4)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=18.$

C. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=9.$ D. $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=16.$

Bài giải :

Đường thẳng d đi qua $M(-5;7;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-2;1)$. Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Ta có :

$$IH=d(I,AB)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3\Rightarrow R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=18$$



Vậy (S): $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18.$

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 8: Cho điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm *I* và cắt đường thẳng *d* tại hai điểm *A, B* sao cho tam giác *IAB* đều là:

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=\frac{20}{3}.$ B. $(x-1)^2+y^2+z^2=\frac{20}{3}.$

C. $(x-1)^2+y^2+z^2=\dfrac{16}{4}$. D. $(x-1)^2+y^2+z^2=\dfrac{5}{3}$.

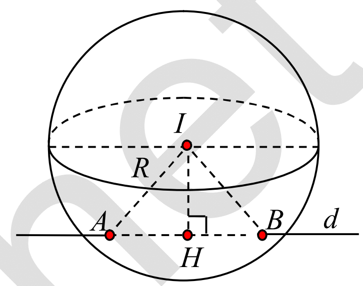
Bài giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M=(1;1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;1)$

Ta có $\overrightarrow{MI}=(0;-1;2)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(5;-2;-1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Ta có :

$$IH=d(I,AB)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{5}.$$



Xét tam giác IAB, có $IH=R.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow R=\dfrac{2IH}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2+y^2+z^2=\dfrac{20}{3}$.

Lựa chọn đáp án **A**.

Bài tập 9: Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+5=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của mặt cầu (S) tại $A(0;0;5)$ biết:

a) Tiếp tuyến có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;2)$.

b) Vuông góc với mặt phẳng (P): $3x-2y+2z+3=0$.

Bài giải:

a) Đường thẳng d qua $A(0;0;5)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;2)$, có phương trình d: $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=5+2t\end{cases}$.

b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(3;-2;2)$.

Đường thẳng d qua $A(0;0;5)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) nên có một vectơ chỉ phương

$\vec{n}_P=(3;-2;2)$, có phương trình d: $\begin{cases}x=3t\\y=-2t\\z=2t+5\end{cases}$.

Bài tập 10: Cho (S): $x^2+y^2+z^2-6x-6y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$;

$\Delta_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) song song với Δ_1 và Δ_2 đồng thời tiếp xúc với (*S*).

Bài giải:

Mặt cầu (*S*) có tâm $I(3;3;-1)$, $R=4$.

Ta có: Δ_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;2;2)$.

Δ_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(2;2;1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp của mặt phẳng (*P*).

Do: $\begin{cases}(P)//\Delta_1\\(P)//\Delta_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}_1\\\vec{n}\perp\vec{u}_2\end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-2;-1;2)$

Lúc đó, mặt phẳng (P) có dạng : $-2x-y+2z+m=0$.

Để mặt phẳng (*P*) tiếp xúc với (*S*) $\Leftrightarrow d(I;(P))=R \Leftrightarrow \dfrac{|5+m|}{3}=4$

$\Leftrightarrow |5+m|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=7\\m=-17\end{array}\right.$.

<u>Kết luận:</u> Vậy tồn tại 2 mặt phẳng (*P*) là : $-2x-y+2z+7=0,\quad -2x-y+2z-17=0$.

Bài tập 11: Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$, biết tiếp diện:

a) qua $M(1;1;1)$.

b) song song với mặt phẳng (*P*) : $x+2y-2z-1=0$.

b) vuông góc với đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Bài giải:

Mặt cầu (*S*) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=3$.

a) Để ý rằng, $M\in(S)$. Tiếp diện tại *M* có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=(2;-1;-2)$, có phương trình :

(α): $2(x-1)-(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-2z+1=0.$

b) Do mặt phẳng $(\alpha)//(P)$ nên (α) có dạng : $x+2y-2z+m=0$.

Do (α) tiếp xúc với (*S*) $\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))=R \Leftrightarrow \dfrac{|m-3|}{3}=3 \Leftrightarrow |m-3|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-6\\m=12\end{array}\right.$.

* Với $m=-6$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z-6=0$.

* Với $m=12$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z+12=0$.

c) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;1;-2)$.

Do mặt phẳng $(\alpha)\perp d$ nên (α) nhận $\vec{u}_d=(2;1;-2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Suy ra mặt phẳng (α) có dạng : $2x+y-2z+m=0$.

Do (α) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d(I,(\alpha))=R\Leftrightarrow \frac{|m-6|}{3}=3\Leftrightarrow |m-6|=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=15 \end{array}\right.$.

* Với $m=-3$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z-3=0$.

* Với $m=15$ suy ra mặt phẳng có phương trình : $x+2y-2z+15=0$.

_______**HẾT**_______