

Có 4 người đàn ông , 2 người đàn bà và một đứa trẻ . Có bao nhiêu cách xếp thành hàng ngang :

- a). Sao cho 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau .
- b). Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà .
- c). Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông .
- d). Đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà .

#### LỜI GIẢI

a). Vì 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .

Số cách xếp 4 người đàn ông và X là  $P_5 = 5! = 120$  cách xếp .

Ứng với mỗi cách xếp trên có  $3! = 6$  cách xếp 2 người đàn bà và đứa trẻ .

Theo qui tắc nhân ta có  $120.6 = 720$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

b). Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà có nghĩa 3 người này cũng đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .

Số cách xếp 4 người đàn ông và X là  $P_5 = 5! = 120$  cách xếp .

Ứng với mỗi cách xếp trên có  $2! = 2$  cách xếp 2 người đàn bà .

Theo qui tắc nhân ta có  $120.2 = 240$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

c). Đầu tiên chọn 2 người đàn ông trong 4 người đàn ông có  $C_4^2 = 6$  cách chọn .

Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông có nghĩa 3 người này đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .

Số cách xếp 4 người gồm 2 đàn ông 2 đàn bà và X là  $P_5 = 5! = 120$  cách xếp .

Ứng với mỗi cách xếp trên có  $2! = 2$  cách xếp 2 người đàn ông .

Theo qui tắc nhân ta có  $120.2.6 = 1440$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

d). Bước 1 : Xếp sếp 7 người bất kỳ là  $7!$

Bước 2 : Xếp đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà là 240 cách

Suy ra số cách xếp hai đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà :  $7! - 240 = 4800$

Có 6 nam, 6 nữ trong đó có ba bạn tên A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc để vào lớp sao cho:

- a). Các bạn nữ không ai đứng cạnh nhau.
- b). Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.
- c). Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái.
- d). Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái.
- e). A, B, C luôn đứng gần nhau.
- f). A, B, C không ai đứng gần nhau.
- g). A, B đứng cách nhau đúng 1 người.
- h). A, B cách nhau đúng 2 người.

#### LỜI GIẢI

**a). Các bạn nữ không ai đứng cạnh nhau.**

Bước 1: Xếp 6 bạn nam thành 1 hàng có  $6!$  cách.

Xem các bạn nam như các vách ngăn, giữa 6 bạn nam có 5 vách ngăn, và thêm 2 vị trí đầu và cuối tổng cộng có 7 vị trí để xếp các bạn nữ.

Bước 2: Xếp chọn 6 vị trí trống trong 7 vị trí để xếp 6 bạn nữ vào, có  $A_7^6$  cách.

Theo quy tắc nhân có  $6!.A_7^6 = 3628800$  cách xếp thỏa yêu cầu.

**b). Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.**

Bước 1: Chọn 2 trong 6 bạn nam xếp vào đầu hàng và cuối hàng có  $A_6^2$  cách.

Bước 2: Xếp 6 bạn nữ và 4 bạn nam còn lại vào ở giữa có  $10!$  Cách xếp.

Theo quy tắc nhân có  $A_6^2.10! = 108864000$  cách xếp.

**c). Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái.**

Trường hợp 1: Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam. Theo câu b) có  $108864000$  cách xếp.

Trường hợp 1: Đầu hàng và cuối hàng luôn là nữ. Cách xếp hoàn toàn tương tự câu b) và số cách xếp cũng là  $108864000$  cách.

Theo quy tắc cộng có  $108864000 + 108864000 = 217728000$  cách.

**d). Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái.**

Bước 1: Nếu đầu hàng là nam thì cuối hàng là nữ, còn nếu đầu hàng là nữ thì cuối hàng là nam. Vậy có 2 cách chọn giới ở đầu hàng. Có 6 cách chọn bạn nam để xếp vào đầu hàng hoặc cuối hàng, và có 6 cách chọn bạn nữ để xếp vào đầu hàng hoặc cuối hàng.

Bước 2: Còn lại 10 bạn xếp vào ở giữa có  $10!$  Cách xếp.

Theo quy tắc nhân có  $2.6.6.10! = 261273600$ .

**e). A, B, C luôn đứng gần nhau.**

Vì nhóm A, B, C luôn đứng gần nhau, nên gọi nhóm này là X.

Bước 1: Xếp X và 9 người còn lại vào thành một hàng dọc có  $10!$  cách xếp.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1 có  $3!$  cách xếp 3 bạn trong nhóm X.

Theo quy tắc nhân có  $10!.3! = 21772800$  cách.

**f). A, B, C không ai đứng gần nhau.**

Bước 1: Xếp 9 bạn còn lại (không có bạn nào là A, B, C) vào thành 1 hàng có  $9!$  cách xếp.

Xem 9 bạn ở trên như các vách ngăn, giữa 9 bạn có 8 vách ngăn, và thêm 2 vị trí đầu và cuối tổng cộng có 10 vị trí để xếp các 3 bạn A, B, C.

Bước 2: Có  $A_{10}^3$  cách xếp 3 bạn A, B, C vào 10 vị trí.

Theo quy tắc nhân có  $9!.A_{10}^3 = 261273600$  cách xếp thỏa yêu cầu.

**g). A, B đứng cách nhau đúng 1 người.**

Bước 1: Chọn 1 người trong 10 người còn lại, có 10 cách chọn, để tạo thành nhóm X thỏa điều kiện AaB đứng kề nhau với a là người vừa chọn.

Bước 2: Xếp X và 9 người còn lại (bỏ người A, a, B) có  $10!$  cách xếp.

Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2 có  $2!$  cách xếp hai người A và B.

Theo quy tắc nhân có  $10.10!.2! = 72576000$  cách xếp thỏa yêu cầu.

Cách 2:

Bước 1: Xếp 10 người (bỏ A, B) thành một hàng dọc có  $10!$  cách xếp.

Bước 2: Ta xem 10 người là 10 vách ngăn, vậy có 11 khoảng trống kề nhau tức có 10 cặp khoảng trống để xếp 2 bạn A và B vào. Tức có 10 cách xếp.

Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2 có  $2!$  cách xếp hai người A và B.

Theo quy tắc nhân có  $10 \cdot 10! \cdot 2! = 72576000$  cách xếp thỏa yêu cầu.

**h). A, B cách nhau đúng 2 người.**

Bước 1: Chọn 2 người trong 10 người còn lại, có  $C_{10}^2$  cách chọn, để tạo thành nhóm X thỏa điều kiện AaBb đứng kề nhau với a và b là hai người vừa chọn.

Bước 2: Xếp X và 8 người còn lại (bỏ 4 người A, a, b, B) có  $9!$  cách xếp.

Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2 có  $2!$  cách xếp hai người A và B, có  $2!$  cách xếp hai người a và b.

Theo quy tắc nhân có  $C_{10}^2 \cdot 9! \cdot 2! \cdot 2! = 65318400$  cách xếp thỏa yêu cầu.

Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu cháu ngoan Bác Hồ trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn một nhóm 3 học sinh từ 50 học sinh trên đi dự đại hội cháu ngoan Bác Hồ sao cho trong nhóm được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nhóm.

**LỜI GIẢI**

Bước 1: Chọn 3 em trong 50 em bất kỳ có  $C_{50}^3$  cách.

Bước 2: Chọn 3 em trong đó có 1 cặp anh em sinh đôi. Đầu tiên chọn 1 cặp anh em sinh đôi có 4 cách chọn. sau đó chọn 1 em trong 48 em còn lại có 48 cách. Vậy có  $4 \cdot 48 = 192$  cách chọn 3 em trong đó có một cặp anh em sinh đôi.

Vậy có  $C_{50}^3 - 192 = 19408$  cách chọn thỏa yêu cầu.

(ĐHQG TPHCM khối AB đợt 2 1999) Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:

1. Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau.
2. Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

### LỜI GIẢI

1). Giai đoạn 1: Xếp chỗ ngồi cho hai nhóm học sinh, có 2 cách xếp:

A	B	A	B	A	B
B	A	B	A	B	A

B	A	B	A	B	A
A	B	A	B	A	B

Giai đoạn 2: Trong nhóm học sinh của trường A, có  $6!$  cách xếp các em vào 6 chỗ. Tương tự, có  $6!$  cách xếp 6 học sinh trường B vào 6 chỗ.

Kết luận: có  $2.6!6! = 1036800$  cách

2). Học sinh thứ nhất trường A ngồi trước: có 12 cách chọn ghế để ngồi.

Sau đó, chọn học sinh trường B ngồi đối diện với học sinh thứ nhất trường A: có 6 cách chọn học sinh trường B.

Học sinh thứ hai của trường A còn 10 chỗ để chọn, chọn học sinh trường B ngồi đối diện với học sinh thứ hai trường A: có 5 cách chọn, v.v...

Vậy: có  $12.6.10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = 2^6.6!.6! = 33177600$  cách.

Một đoàn tàu có ba toa chở khách : toa 1, toa 2, toa 3. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất một ghế trống. Hỏi có bao nhiêu :

- a. cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa tàu đó ?
- b. cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong 4 vị khách trên ?

### LỜI GIẢI

a . Mỗi vị khách có 3 cách lên toa. Vậy có  $3^4 = 81$  cách xếp cho 4 vị khách lên 3 toa tàu đó.

b . Ta có :

\* Chọn 3 vị khách trong 4 vị và xếp vào một toa : có  $C_4^3.3$  cách ;

\* Xếp vị khách còn lại lên một trong hai toa còn lại : có 2 cách.

Vậy có  $C_4^3.3.2 = 4.6 = 24$  cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

Xếp 3 bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 bi xanh giống nhau vào 1 hộp có 7 ô trống.

- a). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau.

b). Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 bi xanh xếp cạnh nhau.

### LỜI GIẢI

a.

Bước 1: Xếp 3 bi đỏ khác nhau vào hộp có 7 ô trống có  $A_7^3$  cách.

Bước 2: Xếp 3 bi xanh vào 4 ô trống còn lại, có  $C_4^3$  cách.

Theo quy tắc nhân ta có  $A_7^3 C_4^3 = \frac{7!}{4!} \times \frac{4!}{3!1!} = 7.6.5.4 = 840$  cách.

b.

Vì 3 bi đỏ đứng cạnh nhau gọi nhóm 3 bi đỏ là X, và 3 bi xanh đứng cạnh nhau nên gọi nhóm 3 bi xanh là Y.

Vì xếp vào hộp có 7 ô, có 3 viên bi đỏ chiếm 3 vị trí và 3 viên bi xanh chiếm 3 vị trí, còn lại 1 vị trí trống.

Bước 1: Ta xem chỉ có 3 vị trí để xếp X và Y, có  $A_3^2$  cách.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có  $3!$  cách xếp 3 viên bi đỏ khác nhau, còn 3 viên bi xanh chỉ 1 cách xếp vì chúng giống nhau.

Theo quy tắc nhân có  $A_3^2.3! = 36$  cách xếp thỏa yêu cầu.