DẠNG 3: TỔ HỢP

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Khi giải bài toán chọn trên một tập hợp X có n phần tử, ta sẽ dùng tổ hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:

*Chỉ chọn k phần tử trong n phần tử của X ($1 \le k \le n$).

*Không phụ thuộc vào thứ tự sắp xếp các phần tử đã chọn.

VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn.

a) 1 bó hoa trong đó có đúng một bông hồng đỏ.

b) 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

LỜI GIẢI

a). Chọn 1 bó hoa gồm 7 bông, trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ, 6 bông hồng còn lại chọn trong 8 bông (gồm vàng và trắng) . Số cách chọn:

$C_4^1.C_8^6 = 112$ cách.

b). Có các trường hợp sau xảy ra thỏa yêu cầu bài toán:

Trường hợp 1: Chọn 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng, có

$C_5^3.C_4^3.C_3^1$ cách.

Trường hợp 2: Chọn 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ , có $C_5^4.C_4^3$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ , có $C_5^3.C_4^4$ cách.

Theo quy tắc cộng có: $C_5^3.C_4^3.C_3^1 + C_5^4.C_4^3 + C_5^3.C_4^4$.

Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau.

a.Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó có đúng 2 viên bi đỏ.

b.Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ.

LỜI GIẢI

a.Ta lần lượt thức hiện các công đoạn sau:

Bước 1: Chọn 2 bi đỏ trong 5 bi đỏ, có C_5^2 cách chọn .

Bước 2: Có C_{13}^4 cách chọn 4 bi trong 13 viên bi xanh và vàng.

Vậy ta có $C_5^2.C_{13}^4 = 7150$ cách.

b.Số bi xanh, đỏ, vàng được chọn có 3 trường hợp là:

Trường hợp 1: Chọn 3 xanh, 3 đỏ, ta có $C_9^3C_5^3$ cách.

Trường hợp 2: Chọn 2 xanh, 2 đỏ, 2 vàng, ta có $C_9^2C_5^2C_4^2$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 1 xanh, 1 đỏ, 4 vàng, ta có $C_9^1C_5^1C_4^4$ cách.

Theo quy tắc cộng ta có: $C_9^3.C_5^3 + C_9^2.C_5^2.C_4^2 + C_9^1.C_5^1.C_4^4 = 3045$ cách.

Có một hộp đựng 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng.

a). Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi, trong đó có 2 viên bi xanh và có nhiều nhất 2 viên bi vàng và phải có đủ 3 màu.

b). Có bao nhiêu cách lấy ra 9 viên bi có đủ 3 màu.

LỜI GIẢI

a). Các trường hợp xảy ra theo yêu cầu đề:

Trường hợp 1: 2 xanh, 2 vàng, 2 đỏ, có: $C_5^2.C_4^2.C_6^2$ cách.

Trường hợp 2: 2 xanh,1 vàng, 3 đỏ, có: $C_5^2.C_4^1.C_6^3$ cách.

Vậy có : $C_5^2.C_4^2.C_6^2 + C_5^2.C_4^1.C_6^3 = 1700$ cách.

b). Sử dụng phương pháp gián tiếp:

Lấy ra 9 viên bi trong 15 viên bi bất kỳ, có C_{15}^9 cách.

Trường hợp 1: lấy 9 viên bi chỉ có 2 màu là xanh và đỏ, có C_{11}^9 cách.

Trường hợp 2: lấy 9 viên bi chỉ có 2 màu là xanh và vàng, có C_9^9 cách.

Trường hợp 3: lấy ra 9 viên bi chỉ có màu đỏ và vàng, có C_{10}^9 cách.

Vậy có : $C_{15}^9 - \left(C_{11}^9 + C_9^9 + C_{10}^9\right) = 4984$ cách.

Một đội cảnh sát giao thông gồm 15 người trong đó có 12 nam. Hỏi có bao nhiêu cách phân đội csgt đó về 3 chốt giao thông sao cho mỗi chốt có 4 nam và 1 nữ.

LỜI GIẢI

Bước 1: Chọn 4 nam trong 12 nam và chọn 1 nữ trong 3 nữ, có $C_{12}^4.C_3^1$ cách.

Bước 2: Chọn 4 nam trong 8 nam còn lại và chọn 1 nữ trong 2 nữ còn lại, có $C_8^4.C_2^1$ cách.

Bước 3: 4 nam còn lại và 1 nữ còn lại bắt buộc phải về công tác ở chốt giao thông cuối cùng, nên có 1 cách.

Theo quy tắc nhân có: $C_{12}^4.C_3^1.C_8^4.C_2^1.1=207900$ cách chọn.

372. Môt lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập 1 đội gồm 4 học sinh trong đó có.

a.Số nam và nữ bằng nhau. **b.**ít nhất 1 nữ.

LỜI GIẢI

a.Bước 1: Chọn 2 nam trong 14 nam, có C_{14}^2 cách.

Bước 2: Chọn 2 nữ trong 6 nữ,có C_6^2 cách.

Vậy số cách chọn nhóm có 2 nam, 2 nữ là $C_{14}^2.C_6^2=1365$ cách.

b. Cách 1: Xét các trường hợp xảy ra cụ thể:

Trường hợp 1: Chọn 1 nữ, 3 nam có $6.C_{14}^3=2184$ cách

Trường hợp 2: Chọn 2 nữ, 2 nam có $C_{14}^2.C_6^2=1365$ cách

Trường hợp 3: Chọn 3 nữ,1 nam có $C_6^3.14=280$ cách

Trường hợp 4: Chọn 4 nữ thì có $C_6^4=15$ cách

Vậy số cách chọn cần tìm là: $2184+1365+280+15=3844$ cách.

Cách 2: Sử dụng phần bù:

Bước 1: Chọn 4 bạn bất kỳ trong 20 bạn, có C_{20}^4 cách.

Bước 2: Chọn 4 bạn đều nam, có C_{14}^4 cách.

Suy ra chọn 4 bạn có ít nhất 1 nữ: $C_{20}^4-C_{14}^4=3844$ cách chọn.

Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

a.Có đúng 2 nam trong 5 người đó?

b.Có ít nhất 2 nam, ít nhất 1 nữ trong 5 người đó.

LỜI GIẢI

a.Số cách chọn 2 nam , 3 nữ là: $C_{10}^2C_{10}^3=5400$ cách.

b.Có các trường hợp xảy ra thỏa yêu cầu của đề như sau:

Trường hợp 1: Có 2 nam và 3 nữ. Số cách chọn 5400 cách.

Trường hợp 2: Có 3 nam và 2 nữ. Số cách chọn: $C_{10}^3C_{10}^2 = 5400$

Trường hợp 3: Có 4 nam và 1 nữ. Số cách chọn: $C_{10}^4C_{10}^1 = 2100$

$*$ Tổng cộng 3 trường hợp ta có $5400 + 5400 + 2100 = 12900$ cách.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

PHẦN I: DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN LẬP SỐ

a. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?

b. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau đều là số chẵn ?

c. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó các chữ số cách đều số đứng giữa thì giống nhau ?

LỜI GIẢI

a . Gọi $X = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số có 6 chữ số và X chia hết cho 5. Ta có hai khả năng sau :

$*$ $a_6 = 0$: Có A_9^5 cách chọn 5 chữ số còn lại.

$*$ $a_6 = 5$: Có 8 cách chọn a_1 ; có A_8^4 cách chọn 4 chữ số còn lại.

Vậy ta có thể lập được tất cả là $A_9^5 + 8A_8^4 = 28560$.

b. Gọi $Y = \overline{abc}$ là số có ba chữ số đều là số chẵn. Ta có :

$*$ $c = 0$: Có A_4^2 cách chọn a và b.

$*$ $c \neq 0$: c có 4 cách chọn từ các chữ số {2, 4, 6, 8}, a có 3 cách chọn (bỏ số 0 và một chữ số chẵn c đã chọn, b có 3 cách chọn (bỏ 2 chữ số chẵn mà a và c đã chọn). Vậy có 4.3.3 số

Kết luận vậy có $A_4^2 + 4.3.3 = 48$ số thỏa yêu cầu.

c. Gọi $Z = \overline{a_1a_2a_3a_4a_3a_2a_1}$ là số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có : Chọn một số khác 0 xếp vào vị trí a_1 có 9 cách;

Chọn một số xếp vào vị trí a_2 có 10 cách;

Chọn một số xếp vào vị trí a_3 có 10 cách ;

Chọn một số xếp vào vị trí a_4 có 10 cách.

Vậy có $9.10^3 = 9000$ số.

a. Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là số lẻ ?

b. Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng ba chữ số lẻ và ba chữ số chẵn (chữ số đầu phải khác 0) ?

LỜI GIẢI

Gọi tập $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

a . Gọi $A=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6},(a_1\neq 0)$ là số chẵn có 6 chữ số khác nhau và a_1 là số lẻ.

Ta có : * $a_1\in\{1,3,5,7,9\}\Rightarrow a_1$ có 5 cách chọn ;

* $a_6\in\{0,2,4,6,8\}\Rightarrow a_6$ có 5 cách chọn ;

* $\overline{a_2a_3a_4a_5}$ có A_8^4 cách chọn (chọn 4 chữ số từ 8 chữ số thuộc tập A, bỏ 2 chữ số mà a_1 và a_6 đã chọn để xếp vào 4 vị trí $\overline{a_2a_3a_4a_5}$).

Vậy có $5.5.A_8^4=42000$ số A.

b . Gọi $B=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6},(a_1\neq 0)$ là số có 6 chữ số khác nhau trong đó có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Ta có hai trường hợp sau :

TH1 : a_1 là số lẻ, khi đó :

* a_1 có 5 cách chọn ;

* Lấy 2 số lẻ trong 4 số còn lại và 3 số chẵn xếp vào 5 vị trí còn lại có $C_4^2.C_5^3.5!$ cách.

$\Rightarrow$ trường hợp 1 có $5.C_4^2.C_5^3.5!$ số B.

TH2 : a_1 là số chẵn, ta có :

* a_1 có 4 cách chọn ;

* Lấy 2 số chẵn trong 4 số còn lại và 3 số lẻ xếp vào 5 vị trí còn lại có $C_4^2.C_5^3.5!$ cách.

$\Rightarrow$ trường hợp 2 có $4.C_4^2.C_5^3.5!$ số B.

Vậy tất cả có $9.C_4^2.C_5^3.5!=64800$ số B.

Có bao nhiêu số tự nhiên :

a. Có 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ ?

b. Có 6 chữ số, là số lẻ và chia hết cho 9 ?

c. Có 6 chữ số sao cho chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước ?

d. Có 6 chữ số sao cho chữ số đứng sau nhỏ hơn chữ số đứng trước ?

e. Có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 10 ?

f. Có 6 chữ số trong đó 3 chữ số liền nhau phải khác nhau ?

LỜI GIẢI

a . Gọi $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$ là số có 5 chữ số và $P = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ là số lẻ.

Ta có : x_1 có 9 cách chọn ;

x_2 có 10 cách chọn ;

x_3 có 10 cách chọn ;

x_4 có 10 cách chọn ;

x_5 có 5 cách chọn.

Vậy có $9.10^3.5 = 45000$ số X.

b. Số lẻ nhỏ nhất gồm 6 chữ số và chia hết cho 9 là : 100017 ;

Số lẻ lớn nhất gồm 6 chữ số và chia hết cho 9 là : 999999 ;

Các số gồm 6 chữ số và chia hết cho 9 là :

100017, 100035, 100053, … , 999981, 999999.

Đây là một cấp số cộng có $u_1 = 100017, u_n = 999999$ và $d = 18$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = 50000 \text{ số.}$$

c. Gọi $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}$ là số có 6 chữ số và $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Ta có $x_i \neq 0$ nên $x_i \in E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

$*$ Lấy 6 chữ số thuộc E có C_9^6 cách.

$*$ Mỗi bộ 6 chữ số trên lập được đúng 1 số thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy số các số lập được là $C_9^6 = 84$ số.

d. Gọi $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}$ là số có 6 chữ số và $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6$.

Ta có $x_i \in E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

$*$ Lấy 6 chữ số thuộc E có C_{10}^6 cách.

$*$ Mỗi bộ 6 chữ số trên lập được đúng 1 số thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy số các số cần lập được là $C_{10}^6 = 210$ số.

e. Gọi $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$ là số có 5 chữ số khác nhau và X chia hết cho 10.

Ta có : $*$ x_5 có 1 cách chọn ($x_5 = 0$) ;

$*$ $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ có A_9^4 cách chọn.

Vậy tất cả có $A_9^4 = 3024$ số X.

f. Gọi $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}$ là số có 6 chữ số trong đó 3 chữ số liền nhau phải khác nhau.

Ta có : $*$ x_1 có 9 cách chọn ;

$*$ x_2 có 9 cách chọn ;

$*$ x_3 có 8 cách chọn ;

$*$ x_4 có 8 cách chọn ;

$*$ x_5 có 8 cách chọn ;

$*$ x_6 có 8 cách chọn.

Vậy tất cả có $9^2.8^4 = 331776$ số.

4. Tập hợp $E = \{1,2,5,7,8\}$. Có bao nhiêu cách lập ra một số có 3 chữ số khác nhau lấy từ E sao cho :

a. Số tạo thành là số chẵn ?

b. Số tạo thành là một số không có chữ số 5 ?

c. Số tạo thành là một số nhỏ hơn 278 ?

LỜI GIẢI

a . Gọi $x = \overline{abc}$ là số cần lập. Ta có :

$*$ c có 2 cách chọn ;

$*$ $\overline{ab}$ có A_4^2 cách chọn.

Vậy có tất cả là $2.A_4^2$ số thỏa yêu cầu bài toán.

b. Mỗi số thỏa yêu cầu bài toán là một chỉnh hợp chập ba của các số sau : $1;2;7;8$ nên số các số lập được là A_4^3 số.

c. Gọi $x=\overline{abc}$ là số cần lập. Ta có :

$*$ $a=1$: $\overline{bc}$ có A_4^2 cách chọn $\Rightarrow$ lập được A_4^2 số .

$*$ $a=2$: nếu $b=7$ thì c có 2 cách chọn $\Rightarrow$ lập được 2 số ;

nếu $b<7$ thì b có hai cách chọn và c có 3 cách chọn $\Rightarrow$ lập được 2.3 số .

Vậy ta lập được $A_4^2+2+2.3=20$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt sao cho 1, 2, 3 luôn đứng cạnh nhau.

LỜI GIẢI

Gọi a là số gồm ba chữ số khác nhau lập từ các số 1, 2, 3. Ta có $3!$ số a. Với mỗi số a, ta xét tập hợp $A=\{a;0;4;5;6;7;8;9\}$. Số thỏa bài toán có dạng là $M=\overline{xyz}$ trong đó x, y, z phân biệt lấy từ A và luôn có mặt số a. Ta có các trường hợp sau :

$-$ Nếu $x=a$ thì $\overline{yz}$ có A_7^2 cách chọn $\Rightarrow$ có A_7^2 số M;

$-$ Nếu $y=a$ thì x có 6 cách chọn và z có 6 cách chọn $\Rightarrow$ có $6.6=36$ số M;

$-$ Nếu $z=a$ thì x có 6 cách chọn và y có 6 cách chọn $\Rightarrow$ có $6.6=36$ số M.

Do đó từ A ta lập được $A_7^2+36.2=114$ số M.

Vậy số tất cả các số lập được là $3!.114=684$ số.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một, trong đó nhất thiết phải có mặt hai chữ số 1 và 3 ?

LỜI GIẢI

Gọi $A=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số thỏa yêu cầu bài toán. Ta có ba trường hợp sau :

$*$ $a_1=1$: + Xếp số 3 vào 1 trong 4 vị trí a_2,a_3,a_4,a_5 có 4 cách ;

+ Lấy 3 trong 8 số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có A_8^3 cách ;

$\Rightarrow$ có $4.A_8^3$ số có dạng $\overline{1a_2a_3a_4a_5}$.

$*$ $a_1=3$: + Xếp số 1 vào 1 trong 4 vị trí a_2,a_3,a_4,a_5 có 4 cách ;

+ Lấy 3 trong 8 số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có A_8^3 cách.

$\Rightarrow$ có $4.A_8^3$ số có dạng $\overline{3a_2a_3a_4a_5}$.

* $a_1 \neq 1$ và 3 : + a_1 có 7 cách chọn (bỏ 3 chữ số 0, 1, 3).

+ Xếp số 1 và 3 vào 2 trong 4 vị trí còn lại có A_4^2 cách .

+ Lấy 2 trong 7 số còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có A_7^2 cách.

$\Rightarrow$ có $7.A_4^2.A_7^2$ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó có mặt 1 và 3 và $a_1 \neq 1$ và 3.

Vậy tất cả có $2.4.a_8^3 + 7.A_4^2.A_7^2 = 6216$.

Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số đều có mặt hai chữ số 8 và 9.

LỜI GIẢI

Gọi số cần lập là $n = \overline{abcd}$, với $d \in \{0,2,4,6,8\}$. Xét các trường hợp xảy ra sau :

• Trường hợp 1: $d = 0$, chọn 2 vị trí trong 3 vị trí $\overline{abc}$ để xếp hai chữ số 8 và 9 có A_3^2 cách. Vị trí còn lại có 7 cách (bỏ 3 chữ số là 0,8,9). Vậy có $A_3^2.7 = 42$ số.

• Trường hợp 2 : $d = 8$

Nếu $a = 9$, chọn 2 chữ số từ tập {0,1,2,3,4,5,6,7} xếp vào hai vị trí $\overline{bc}$ có A_8^2 cách.

Nếu $a \neq 9$, có 2 cách xếp chữ số 9 vào hai vị trí b,c. Vị trí a có 7 cách chọn (bỏ 3 chữ số là 0,8,9). Vị trí còn lại có 7 cách (bỏ 3 chữ số là 8,9,a). Vậy có $2.7.7 = 98$ số.

• Trường hợp 3 : $d \in \{2,4,6\}$ vậy d có 3 cách chọn. Chọn 2 vị trí trong 3 vị trí $\overline{abc}$ để xếp hai chữ số 8 và 9 có A_3^2 cách. Vị trí còn lại có 7 cách chọn (bỏ 3 chữ số là d,8,9). Vậy có $3.A_3^2.7 = 126$ số, trong 126 số này có những số chữ số 0 đứng ở vị trí a. Số trường hợp số 0 ở vị trí a là $3.2 = 6$ số.

Kết luận vậy có $42 + A_8^2 + 98 + 126 - 6 = 316$ số cần tìm.

Từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1.

LỜI GIẢI

Gọi số cần lập $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}\,(a_1 \neq 0)$

Bước 1: Xếp chữ số 0 vào 1 trong 5 vị trí từ a_2 đến a_6, có 5 cách xếp.

Bước 2: Xếp chữ số 1 vào 1 trong 5 vị trí còn lại (bỏ 1 vị trí chữ số 0 đã chọn), có 5 cách xếp.

Bước 3: Chọn 4 chữ số trong 8 chữ số $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ để xếp vào 4 vị trí còn lại, có A_8^4 cách.

Theo quy tắc nhân có $5.5.A_8^4 = 42000$ số thỏa yêu cầu.