B. KỸ NĂNG CƠ BẢN
I. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

1/ Các khái niệm cơ bản

✧ **Trục của đa giác đáy**: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

✧ **Đường trung trực của đoạn thẳng**: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

✧ **Mặt trung trực của đoạn thẳng**: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

2/ Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

✧ **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục *đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy* và *mặt phẳng trung trực của một cạnh bên* hình chóp.

✧ **Bán kính**: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3/ Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện cơ bản

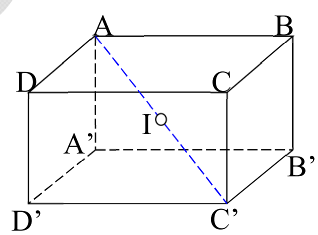
a/ Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

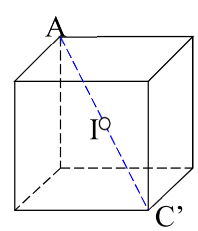
- **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$Tâm là I, là trung điểm của AC'.

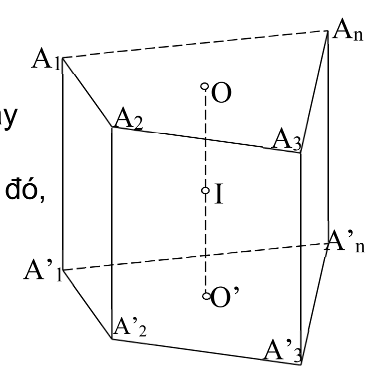
- **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.





b/ Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.

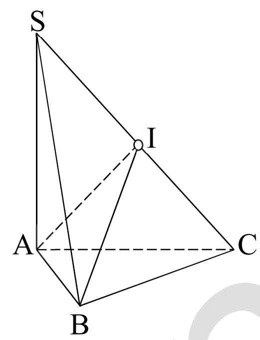


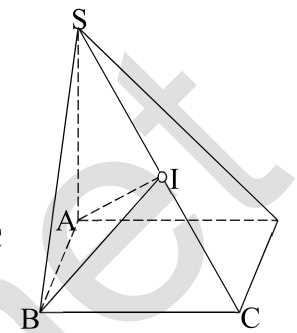
Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A_1'A_2'A_3'...A_n'$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A_1'A_2'A_3'...A_n'$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

- **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'.
- **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n'$.

c/ <u>Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông</u>.

- Hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$.
  + Tâm: I là trung điểm của SC.
  + Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC$.
- Hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$.
  + Tâm: I là trung điểm của SC.
  + Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.





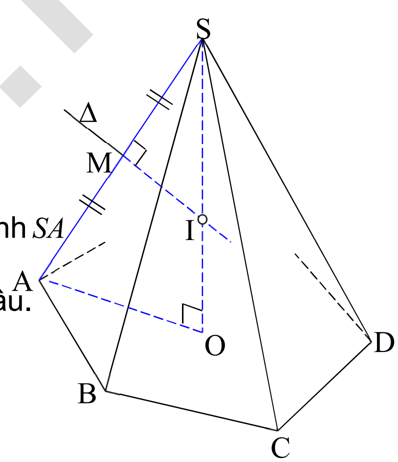
d/ <u>Hình chóp đều</u>.

Cho hình chóp đều $S.ABC...$

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.
- Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.
- Bán kính:

  Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính là:

  $$R = IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$$



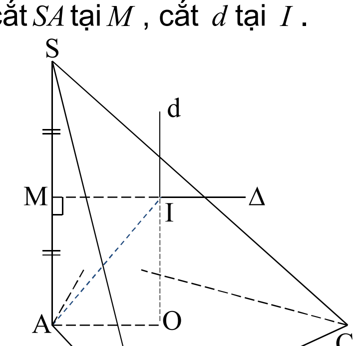
e/ <u>Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy</u>.

Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp$ đáy $(ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau:

- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC...)$ tại O.
- Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại I.

  $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

  và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = ...$
- <u>Tìm bán kính</u>:



Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.

Xét ΔMAI vuông tại M có:

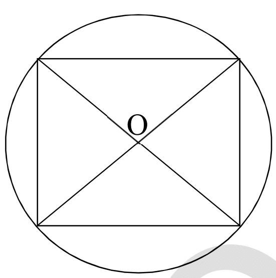
$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$

f/ <u>Hình chóp khác</u>.

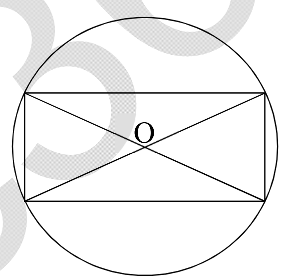
- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

g/ <u>Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp.</u>

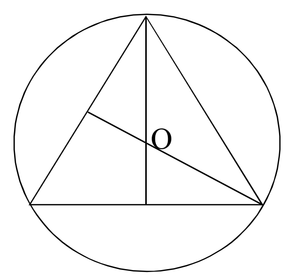
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



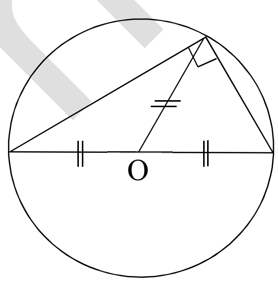
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



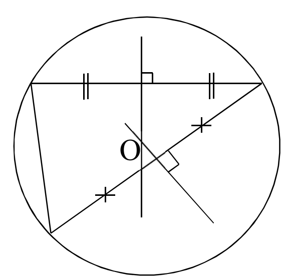
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trong



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.

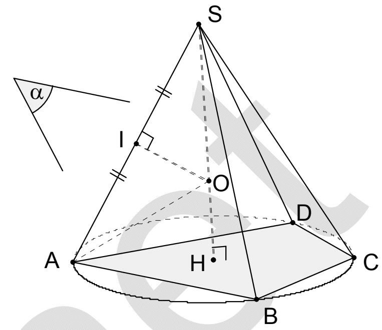


Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai

II. KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP.

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). *Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:*

<u>Bước 1</u>: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.



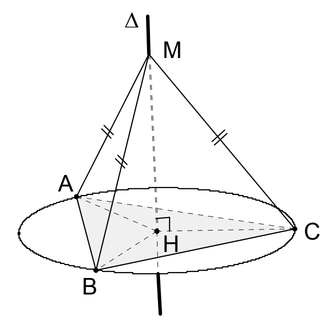
<u>Bước 2</u>: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

Lúc đó : - Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap \text{mp}(\alpha) = \{O\}$

- Bán kính: $R = SA(= SO)$. Tuỳ vào từng trường hợp.

Lưu ý: Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.



Tính chất: $\forall M \in \Delta$: $MA = MB = MC$

Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$

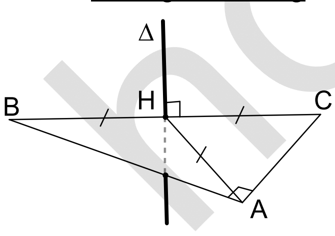
2. Các bước xác định trục:

- <u>Bước 1:</u> Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

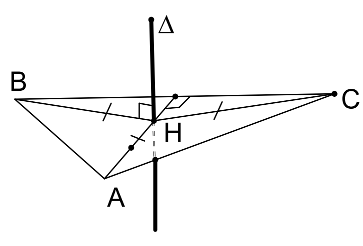
- <u>Bước 2:</u> Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

VD: *Một số trường hợp đặc biệt*

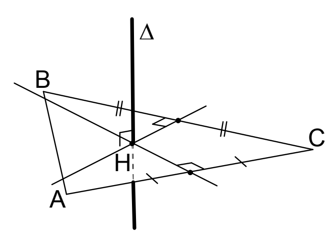
a. <u>Tam giác vuông</u>



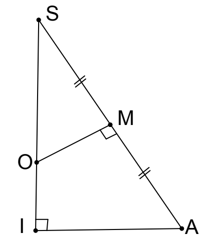
b. <u>Tam giác đều</u>



c. <u>Tam giác bất kì</u>



3. **Lưu ý:** *Kỹ năng tam giác đồng dạng*



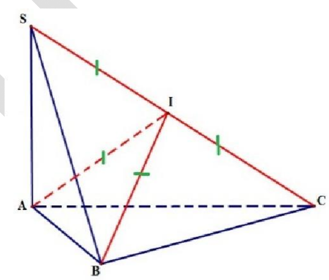
$$\boxed{\Delta SMO \text{ đồng dạng với } \Delta SIA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI}.}$$

4. **Nhận xét quan trọng**:

$$\exists M, S: \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow \text{SM là trục đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC.$$

5. Ví dụ: Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Dạng 1: Chóp có các điểm cùng nhìn một đoạn dưới một góc vuông.



Ví dụ: *Cho* $S.ABC: \begin{cases} SA \perp (ABC) \\ \Delta ABC \perp B \end{cases}$. *Theo đề bài:*

$$\begin{cases} BC \perp AB(gt) \\ BC \perp SA\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases}$$

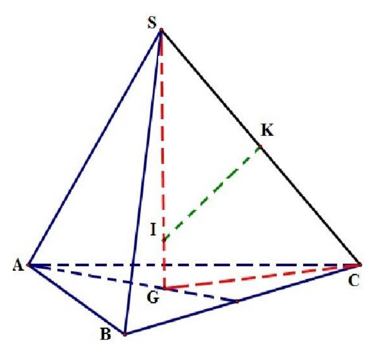
$\Rightarrow$ *BC* $\perp$ *(SAB)* $\Rightarrow$ *BC* $\perp$ *SB*

Ta có B và A nhìn SC dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ *nên B và A cùng nằm trên một mặt cầu có đường kính là SC.*

Gọi I *là trung điểm* $SC \Rightarrow I$ *là tâm MCNT khối chóp* $S.ABC$ *và bán kính* $R = SI$.

Dạng 2: Chóp có các cạnh bên bằng nhau.



Ví dụ: *Cho hình chóp tam giác đều* $S.ABC$.

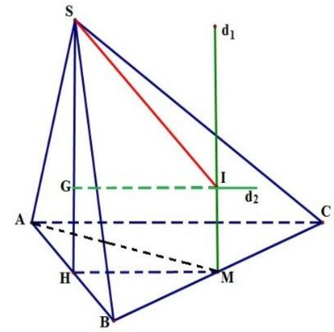
+ Vẽ $SG \perp (ABC)$ *thì* G *là tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC.

+ Trên mặt phẳng (SGC), *vẽ đường trung trực của* SC, *đường này cắt* SG *tại* I *thì* I *là tâm mặt cầu ngoại tiếp* $S.ABC$ *và bán kính* $R = IS$.

+ Ta có $\Delta SGC \sim \Delta SKI(g-g) \Rightarrow \frac{SG}{SK} = \frac{SC}{SI} \Rightarrow \boxed{R = \frac{SC.SK}{SG} = \frac{SC^2}{2SG}}$

Dạng 3: Chóp có một mặt bên vuông góc với đáy.

Ví dụ: *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Mặt bên $(SAB)\perp(ABC)$ và ΔSAB đều. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, AC.*



Ta có M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC (do $MA = MB = MC$).

Dựng d_1 là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC (d_1 qua M và song song SH).

*Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB và d_2 là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSAB, d_2 cắt d_1 tại $I \Rightarrow I$ là tâm **mặt cầu ngoại tiếp** khối chóp $S.ABC$*

$\Rightarrow$ *Bán kính $R = SI$. Xét $\Delta SGI \rightarrow SI = \sqrt{GI^2 + SG^2}$.*