B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Vấn đề 1. CHỨNG MINH HỆ ĐIỂM THUỘC MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU.

Phương pháp:

• Để chứng minh một hệ điểm nằm trên mặt nón, ta chứng minh đường thẳng đi qua điểm đó và đỉnh của mặt nón tạo với trục mặt nón một góc không đổi α.

• Để chứng minh một hệ điểm thuộc mặt trụ, ta chứng minh khoảng cách từ các điểm đó đến trục của mặt trụ bằng bán kính của mặt trụ.

• Để chứng minh một hệ điểm nằm trên một mặt cầu, ta có thể sử dụng các cách sau:

Cách 1: Chứng minh hệ điểm đó cách đều một điểm cố định cho trước

Cách 2: Chứng minh hệ điểm đó cùng nhìn một đoạn thẳng cố định dưới một góc vuông.

Ví dụ 1.1.5 Cho tam giác ABC vuông tại $B, BA = BC = a$. Cho S là một di động trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A (S không trùng A). Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB, SC lần lượt tại H và K. Gọi I là giao điểm của HK và BC

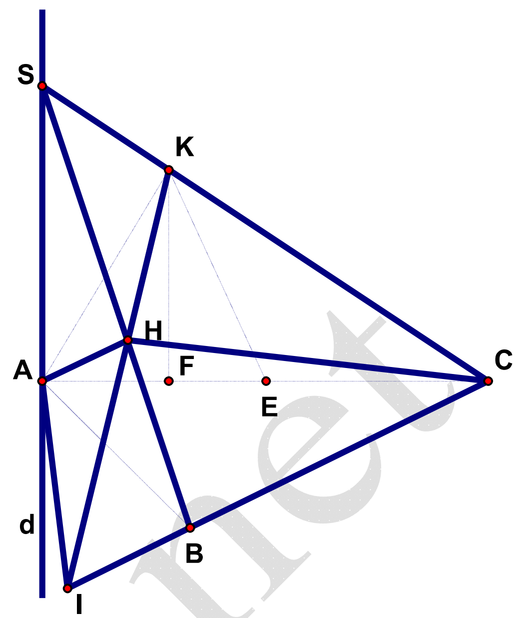
1. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, H, K cùng thuộc một mặt cầu .Tính diện tích của mặt cầu đó;

2. Khi thể tích của khối chóp $K.ABC$ đạt giá trị lớn nhất , tính thể tích của khối chóp $S.ABC$;

3. Chứng minh rằng khi S di động trên (d) thì đường thẳng AI luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Lời giải.

1. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, H, K cùng thuộc một mặt cầu .Tính diện tích của mặt cầu đó.



$\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$

$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \subset (P) \Rightarrow AH \perp SC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp SC \Rightarrow AHC = 90^0$

$AK \subset (P) \Rightarrow AK \perp SC \Rightarrow AKC = 90^0.$

Ta có : $AHC = AKC = ABC = 90^0 \Rightarrow 5$ điểm A, B, C, H, K thuộc mặt cầu (α) đường kính AC.

Tam giác ABC vuông cân tại B có $BA = BC = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}.$

Diện tích của mặt cầu (α) :

$$S_{mc} = 4\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2.$$

2. Khi thể tích của khối chóp $K.ABC$ đạt giá trị lớn nhất , tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

Gọi E là trung điểm của AC và F là hình chiếu vuông góc của K lên AC , ta có : $KF \perp (ABC)$ (do $KF \,//\, SA$) và $KF \le KC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp $K.ABC$: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.KF$.

Vì S_{ABC} không đổi nên

V lớn nhất $\Leftrightarrow KF$ lớn nhất $\Leftrightarrow KF = KC$

$\Leftrightarrow F \equiv E \Leftrightarrow K$ là trung điểm của SC .

Khi đó : $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.KF = \frac{1}{6}AB.AC.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

3. Chứng minh đường thẳng AI luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định .

$\begin{cases} AI \subset (ABC) \Rightarrow AI \perp SA \\ AI \subset (P) \Rightarrow AI \perp SC \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SAC) \Rightarrow AI \perp AC.$

Suy ra AI luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định (α) đường kính AC .

Ví dụ 2.1.5

Lời giải.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Trong mặt phẳng (P) cho một điểm O cố định. Xét một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua O sao cho góc giữa l và mặt phẳng (P) luôn luôn bằng α không đổi $(\alpha \neq 90^0)$. Chứng minh rằng l luôn nằm trên một mặt nón cố định.

2. Cho mặt phẳng (α). Gọi A là một điểm nằm trên mặt phẳng (α) và B là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho hình chiếu H của B trên mặt phẳng (α) không trùng với A. Một điểm M chạy trên mặt phẳng (α) sao cho sao cho $ABM = BMH$. Chứng minh rằng điểm M luôn nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là AB.

3. Cho điểm A nằm ở ngoài mặt cầu (S). Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A tiếp xúc với mặt cầu (S) luôn nằm trên một mặt nón cố định.

4. Trong không gian cho hai điểm A, B phân biệt cố định, và một điểm M bất kỳ trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB có diện tích S không đổi. Chứng minh điểm M thuộc một mặt trụ cố định, xác định bán kính mặt trụ đó.

Bài 2

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$; $AC \perp BD$. Chứng minh rằng 6 trung điểm của 6 cạnh nằm trên một mặt cầu .

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Biết $SA = a, AB = b, AD = c$. Chứng minh các điểm A, B, C, D, M, N, P thuộc một mặt cầu. Tính bán kính của mặt cầu đó.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại K, L, M, N. Gọi P là một điểm bất kì trong không gian không nằm trên các mặt của tứ diện. Các đường thẳng PK, PL, PM, PN một lần nữa cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PBC, PCD, PDA lần lượt tại Q, R, S, T. Chứng minh rằng các điểm P, Q, R, S và T nằm trên một mặt cầu.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 3

1. Trong hình phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mp(P) lấy một điểm S bất kỳ. Gọi (Q) là hình phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh rằng bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng thuộc một hình cầu cố định. Xác định bán kính hình cầu đó.

2. Chứng minh rằng nếu hai đường tròn $(O_1), (O_1)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt thì các điểm nằm trên hai đường tròn đó nằm trên một mặt cầu.

Bài 4

Cho tứ diện gần đều $ABCD$ (tức là $AB = CD, BC = AD,\ AC = BD$). Chứng minh rằng bốn chân đường cao hạ xuống các mặt, bốn trung điểm của các đường cao và bốn trực tâm của bốn mặt là 12 điểm nằm trên mặt cầu.