Ví dụ 1.4.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC=8$

Lời giải.

Đường thẳng Δ qua $M(-2;2;-3)$ và có $\vec{u}=(2;3;2)$

vtcp; $d(A,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3$

Gọi H là hình chiếu của A lên Δ thì $AH=3$ và H là trung điểm của BC nên $BH=4$. Vậy bán kính mặt cầu là $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=5$.

Nên phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

Ví dụ 2.4.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$:

Cho đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ, bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) ***Đề thi ĐH Khối D – 2011***

Lời giải.

Gọi (S) là mặt cầu cần tìm, I là tâm.

Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3+4t \\ z=t \end{cases}$

Vì $I\in\Delta \Rightarrow I(1+2t;3+4t;t)$.

Ta có (P) tiếp xúc với (S)

nên $d(I,(P))=1 \Leftrightarrow \frac{|2(1+2t)-(3+4t)+2t|}{3}=1 \Leftrightarrow t=2, t=-1$

- $t=2 \Rightarrow I(5;11;2) \Rightarrow$ phương trình mặt cầu

$(S):(x-5)^2+(y-11)^2+(z-2)^2=1$

- $t=-1 \Rightarrow I(-1;-1;-1)$, suy ra phương trình

$(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$.

Ví dụ 3.4.6 Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ cho $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+5=0$

1. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) với mp(P) là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π;

2. Chứng minh rằng mặt cầu (S) nói trong phần 1 tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 2x-2=y+3=z$;

3. Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với (S).

Lời giải.

1. Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn (C).

Ta có: $2\pi r=8\pi \Rightarrow r=4$ và $d(I,(P))=3$ nên $R=\sqrt{r^2+d^2(I,(P))}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

2. Đường thẳng Δ có $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;2)$ là VTCP và đi qua $A(1;-3;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}=(0;5;-2) \Rightarrow [\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AI}]=(-14;2;5) \Rightarrow d(I,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AI}]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}=5$

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Cách 2.

Phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=2t \end{cases}$, thay vào phương trình mặt cầu

(S) ,

ta được: $t^2+(2t-5)^2+(2t+2)^2=25\Leftrightarrow(3t-2)^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$

Suy ra mặt cầu (S) và Δ giao nhau tại một điểm $M(\frac{5}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3})$.

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M.

3. Vì mp(Q) chứa Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) nên M là tiếp điểm của mp(Q) và mặt cầu (S)

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua M và nhận $\overrightarrow{IM}\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{11}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ làm VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-11y+10z-35=0$.

Ví dụ 4.4.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$
1. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua điểm $M(1;-5;2)$ và qua đường tròn (C) là giao của mp $(\alpha): 2x+2y-z+9=0$ và mặt cầu
$(S'): x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z-40=0$

2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $d:\begin{cases}x=t\\y=-2+t\\z=-6+2t\end{cases}$ sao cho giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu
$(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ là đường tròn có bán kính $r=1$.

Lời giải.

1. Cách 1.

Mặt cầu (S') có tâm $I'(-1;2;2), R'=7$,

$d(I',(\alpha))=\dfrac{|-2+4-2+9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=3<R'$ nên đường tròn (C) tồn tại và có bán kính $r=2\sqrt{10}$. Gọi H là tâm của (C)

Ta có $I'H \perp (\alpha) \Rightarrow I'H : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Suy ra tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 - t \\ 2x + 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow H(-3; 0; 3)$$

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm H và vuông góc với (α), suy ra phương trình của $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S), vì (S) đi qua đường tròn (C) nên $I \in d$

Suy ra $I(-3 + 2t; 2t; 3 - t) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = (2t - 4; 2t + 5; 1 - t)$,

$d(I, (\alpha)) = \dfrac{|9t|}{3} = 3|t|$

Mặt khác, ta có:

$IM^2 = r^2 + d^2(I, (\alpha)) \Leftrightarrow (2t - 4)^2 + (2t + 5)^2 + (1 - t)^2 = 40 + 9t^2$

$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-5; -2; 4),\ R = IM = 7$.

Vậy phương trình $(S) : (x + 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 49$.

Cách 2.

Vì mặt cầu (S) đi qua đường tròn (C) nên phương trình (S) có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 + \lambda(2x + 2y - z + 9) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + (2 + 2\lambda)x - (4 - 2\lambda)y - (4 + \lambda)z - 40 + 9\lambda = 0$.

Vì $M(1; -5; 2) \in (S) \Rightarrow 44 - 10\lambda - 40 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y - 8z - 4 = 0$.

2. Đường thẳng d đi qua $A(0;-2;-6)$ và có $\vec{u}=(1;1;2)$ là VTCP

Phương trình của (P) có dạng: $ax+b(y+2)+c(z+6)=0$

Hay $ax+by+cz+2b+6c=0$

Trong đó $a^2+b^2+c^2\neq 0$ và $a+b+2c=0\Rightarrow a=-b-2c$ (1)

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;-1)$, bán kính $R=2$

Theo giả thiết, ta suy ra $d(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}$

Do đó: $\dfrac{|-a+3b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow|4b+7c|=\sqrt{3}.\sqrt{(b+2c)^2+b^2+c^2}$

$\Leftrightarrow(4b+7c)^2=3(2b^2+4bc+5c^2)\Leftrightarrow 5b^2+22bc+17c^2=0\Leftrightarrow b=-c, b=-\dfrac{17}{5}c$

- $b=-c$ ta chọn $c=-1\Rightarrow b=1\Rightarrow a=1\Rightarrow(P):x+y-z-4=0$
- $b=-\dfrac{17}{5}c$ ta chọn

$c=5\Rightarrow b=-17\Rightarrow a=7\Rightarrow(P):7x-17y+5z-4=0$.

Ví dụ 5.4.6 Lập phương trình mặt phẳng (P) biết:

1. (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau có phương trình:

$$\Delta_1:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{1},\ \Delta_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}.$$

2. (P) chứa hai đường thẳng song song có phương trình:

$$\Delta_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1},\quad \Delta_3:\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

3. (P) chứa đường thẳng Δ_1 và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình:

$(S):\ x^2+y^2+z^2-8x+2y+4z+7=0.$

4. (P) chứa đường thẳng Δ_3 và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính lớn nhất.

5. (P) chứa đường thẳng Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{\sqrt{210}}{6}$.

Lời giải.

1. Đường thẳng Δ_1 qua $M_1(0;-1;-1)$ và $\vec{u}_{\Delta_1}(1;1;1)$. Đường thẳng Δ_2 qua $M_2(-2;2;0)$ và $\vec{u}_{\Delta_2}(2;-3;-1)$.

Cặp véc tơ chỉ phương của (P) là $\vec{u}_{\Delta_1}(1;\,1;\,1)$ và $\vec{u}_{\Delta_2}(2;\,-3;\,-1)$, nên một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u}_{\Delta_1};\vec{u}_{\Delta_2}\right]=(2;\,3;\,-5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là

$$2(x-0)+3(y+1)-5(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-5z-2=0.$$

2. Đường thẳng Δ_3 qua $M_3(-2;\,1;\,3)$ và $\vec{u}_{\Delta_3}(-2;\,3;\,1)$.

Cặp véc tơ chỉ phương của (P) là $\vec{u}_{\Delta_2}(2;\,-3;\,-1)$ và $\overrightarrow{M_2M_3}(0;\,-1;\,3)$ nên một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u}_{\Delta_2};\,\overrightarrow{M_2M_3}\right]=-2(5;\,3;\,1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng Δ_2 và Δ_3 là

$$5(x+2)+3(y-1)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow 5x+3y+z+4=0.$$

3. Vì (P) chứa đường thẳng Δ_1 nên (P) đi qua hai điểm thuộc Δ_1 là điểm $M_1(0;\,-1;\,-1)$ và $N_1(1;\,0;\,0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua M_1 có dạng

$$a(x-0)+b(y+1)+c(z+1)=0,\ a^2+b^2+c^2>0.$$

Vì (P) qua N_1 nên $c=-b-a$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(4;\,-1;\,-2)$ và bán kính $R=\sqrt{14}$.

(P) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(I;\,(P))=R$, hay

$$\frac{|4a+b.0+(-b-a).(-1)|}{\sqrt{a^2+b^2+(-b-a)^2}}=\sqrt{14} \Leftrightarrow |5a+b|=\sqrt{14(2a^2+2ab+2b^2)}$$

$$\Leftrightarrow a^2+6ab+9b^2=0 \Leftrightarrow a=-3b.$$

Chọn $b=-1$ thì $a=3;\ c=-2$ nên phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$(P):\ 3x-y-2z-3=0.$$

4. Đường tròn giao tuyến có bán kính lớn nhất khi và chỉ khi đường tròn đó qua tâm mặt cầu. Tức là mặt phẳng (P) chứa Δ_3 và đi qua tâm $I(4;\,-1;\,-2)$.

Ta có $\vec{u}_{\Delta_3}(-2;\,3;\,1)$ và $\overrightarrow{IM_3}(-6;\,2;\,5)$ nên một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u}_{\Delta_3};\,\overrightarrow{IM_3}\right]=(13;\,4;\,14)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là $(P):\ 13x+4y+14z-20=0$.

5. Vì (P) chứa đường thẳng Δ_2 nên (P) đi qua hai điểm thuộc Δ_2 là điểm $M_2(-2;\,2;\,0)$ và $N_2(0;\,-1;\,-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua M_1 có dạng

$$a(x+2)+b(y-2)+c(z-0)=0,\ a^2+b^2+c^2>0.$$

Vì (P) qua N_2 nên $c = 2a - 3b.$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng $r = \frac{\sqrt{210}}{6}$ nên

$d^2(I;(P)) = R^2 - r^2 = 14 - \frac{210}{36} = \frac{49}{6} \Rightarrow d(I;(P)) = \frac{7}{\sqrt{6}}.$

Do đo $\frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{|6a - 3b + (2a - 3b).(-2)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (2a - 3b)^2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6}|2a + 3b| = 7\sqrt{5a^2 - 12ab + 10b^2}$$

$$\Leftrightarrow 221a^2 - 660ab + 435b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b;\ a = \frac{218}{221}b.$$

Nếu $a = 2b$ thì chọn $b = 1$ ta có $a = 2; c = 1$ nên phương trình mặt phẳng $(P):\ 2x + y + z + 2 = 0.$

Nếu $a = \frac{218}{221}b$ thì chọn $b = 221$ ta có $a = 218; c = -227$ nên phương trình mặt phẳng $(P):\ 218x + 221y - 227z - 6 = 0.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là

$$(P):\ 2x + y + z + 2 = 0 \text{ và } (P):\ 218x + 221y - 227z - 6 = 0.$$