B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÓAN.

Vì phần này chỉ có mục đích giới thiệu cho học sinh các khái niệm cơ bản của khối đa diện và một số phép biến hình trong không gian, do đó trong các dạng tóan dưới đây chỉ đề cập vấn đề vận dụng phép biến hình để giải một số dạng tóan hình học không gian .

Vấn đề 1. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CẠNH, ĐỈNH VÀ MẶT HÌNH ĐA DIỆN, CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Phương pháp:

- Dựa vào định nghĩa hình đa diện
- Dựa vào định lí Euler về mối quan hệ giữa số đỉnh, số cạnh và số mặt.
- Dựa vào giả thiết của bài toán ,chọn một phép biến hình thích hợp và vận dụng các tính chất của phép biến hình này để giải.
- Để tìm tập hợp điểm M ,ta tìm một phép biến hình f biến M thành điểm N ,trong đó tập hợp của N đã biết hay dễ tìm .Khi đó tập hợp điểm M là ảnh của tập hợp điểm N qua phép biến hình f.

Ví dụ 1.1.1 Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là những tam giác thì tổng các mặt của nó phải là một số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4,6,8,10.

Lời giải.

Gọi số cạnh và số mặt của đa diện lần lượt là c và m . Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là $c=\frac{3m}{2}\Rightarrow 3m=2c\Rightarrow 3m$ chia hết cho 2 mà 3 không chia hết cho 2 nên m phải chia hết cho 2 , nghĩa là m là số chẵn.

*Khối đa diện $ABCD$ có 4 mặt mà mỗi mặt là một tam giác .

*Xét tam giác BCD và hai điểm A,E ở về hai phía của mặt phẳng (BCD) . Khi đó ta có khối lục diện $ABCDE$ có 6 mặt là những tam giác .

*Khối bát diện $ABCDEF$ có 8 mặt là những tam giác .

*Xét ngũ giác $ABCDE$ và hai điểm M,N ở về hai phía của mặt phẳng chứa ngũ giác. Khi đó ta có khối thập diện $MABCDEN$ có 10 mặt là những tam giác .

Ví dụ 2.1.1 Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn.

Lời giải.

Gọi k là số đỉnh của đa diện và C là số cạnh của đa diện .

Ta có:

-Tại đỉnh thứ 1 có $(2n_1+1)$ mặt nên có $(2n_1+1)$ cạnh qua đỉnh thứ nhất.

-Tại đỉnh thứ hai có $(2n_2+1)$ mặt nên có $(2n_2+1)$ cạnh qua đỉnh thứ hai.

....

-Tại đỉnh thứ k có $(2n_k+1)$ mặt nên có $(2n_k+1)$ cạnh qua đỉnh thứ k.

Mặt khác vì mỗi cạnh đi qua hai đỉnh nên ta có

$$2C=(2n_1+1)+(2n_2+1)+.....+(2n_k+1)$$
$$=k+2(n_1+n_2+....+n_k)$$
$$\Rightarrow k=2\left[C-(n_1+n_2+....+n_k)\right]$$

$\Rightarrow$ k là số chẵn (đpcm).

Ví dụ 3.1.1 Cho hình chóp $S.ABCD$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD; G là trọng tâm của tam giác SAC. Chứng minh ba điểm H,G,K thẳng hàng.

Lời giải.

$$SA\perp(ABCD)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AB\\ SA\perp AD\end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta SAB,\Delta SAD$ vuông tại A.

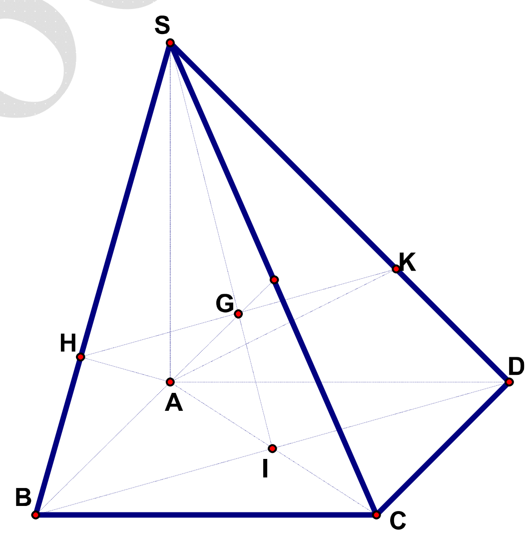
Xét tam giác vuông SAB, ta có:

$$SB^2=SA^2+AB^2=2a^2+a^2=3a^2$$

$$SA^2=SH.SB\Rightarrow\frac{SH}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{2}{3}.$$

Chứng minh tương tự ,ta cũng có :

$$\frac{SK}{SD}=\frac{2}{3}.$$



Gọi I là giao điểm của AC và BD thì I là trung điểm của AC nên G thuộc SI và $\frac{SG}{SI}=\frac{2}{3}$.

Gọi f là phép vị tự tâm S, tỉ số $\frac{2}{3}$, ta có:

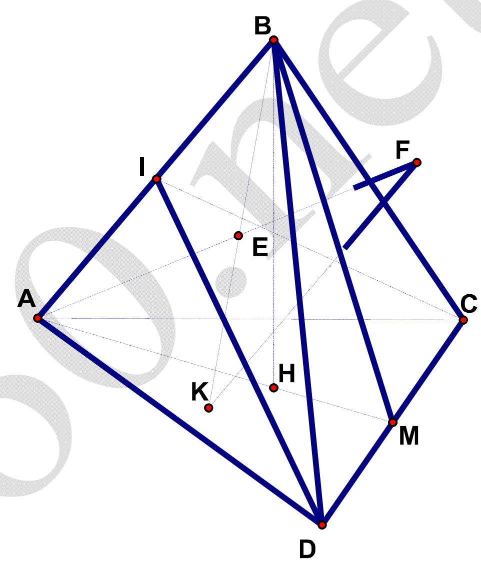
$$f(B)=H,f(I)=G,f(D)=K$$

Vì B, I, D thẳng hàng nên H, I, K cũng thẳng hàng

Ví dụ 4.1.1 Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi (P) là mặt trung trực của cạnh AB, K là một điểm trong tam giác ACD và E là giao điểm của BK và $(P), F$ là điểm đối xứng của K qua (P). Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng và $EA + EF \geq \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên bốn mặt của nó là 4 tam giác đều bằng nhau. Gọi I là trung điểm của AB, khi đó ta có $DI \perp AB, CI \perp AB$, suy ra (CDI) là mặt trung trực của AB tức là $(CDI) \equiv (P)$.



Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)

biến : $E \to E$, $B \to A$, $K \to F$

Vì B, E, K thẳng hàng nên A, E, F thẳng hàng

Lại có $EA = EB, EF = EK$, suy ra $EA + EF = EB + EK = BK$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (ACD) và M là trung điểm của CD. thì H là tâm của tam giác ACD và $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông BHA:

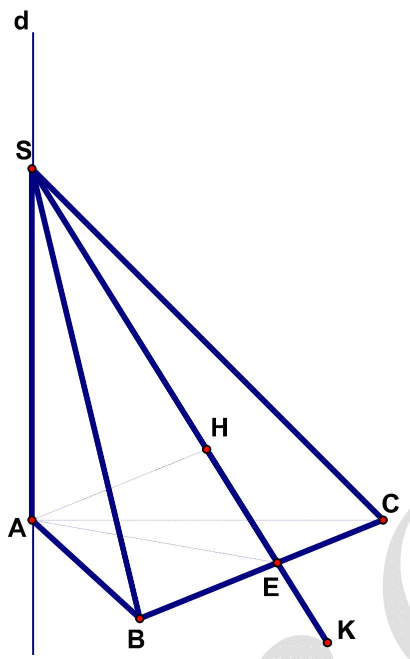
$$BH^2 = BA^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

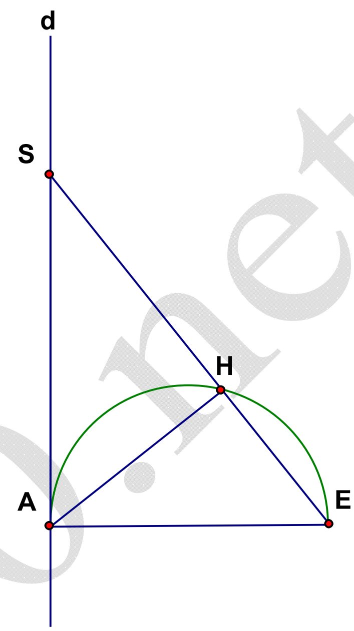
Lại có $BK \geq BH$, suy ra $EA + EF \geq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 5.1.1 Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Gọi S là một điểm di động trên d và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SBC).

1. Chứng minh H là trực tậm của tam giác SBC.
2. Gọi K là giao điểm của SH với đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Tìm tập hợp các điểm K khi S di động trên đường thẳng d

Lời giải.





1.Chứng minh H là trực tâm của tam giác SBC.

Ta có : $BC \perp SA$,$BC \perp AH \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$ (1)

$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp SC$. Lại có

$SC \perp AH \Rightarrow SC \perp (ABH) \Rightarrow SC \perp BH(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác SBC.

2.Tập hợp các điểm K**.**

Theo tính chất của trực tâm , nếu K là giao điểm của SH với đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC thì K và H đối xứng với nhau qua đường thẳng BC.

Gọi E là giao điểm của SH với BC, ta có $BC \perp (SAH)$, suy ra $BC \perp AE$; E là hình chiếu vuông góc của A lên BC nên E cố định.

$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SE$.

Trong mặt phẳng cố định (E,d), $AHE = 90^0$ do đó tập hợp H là đường tròn (C) đường kính AE chứa trong mặt phẳng (E,d) loại bỏ điểm E (do H không thể trùng E)

H và K đối xứng với nhau qua đường thẳng BC, suy ra tập hợp K là ảnh của tập hợp H qua phép đối xứng trục BC.

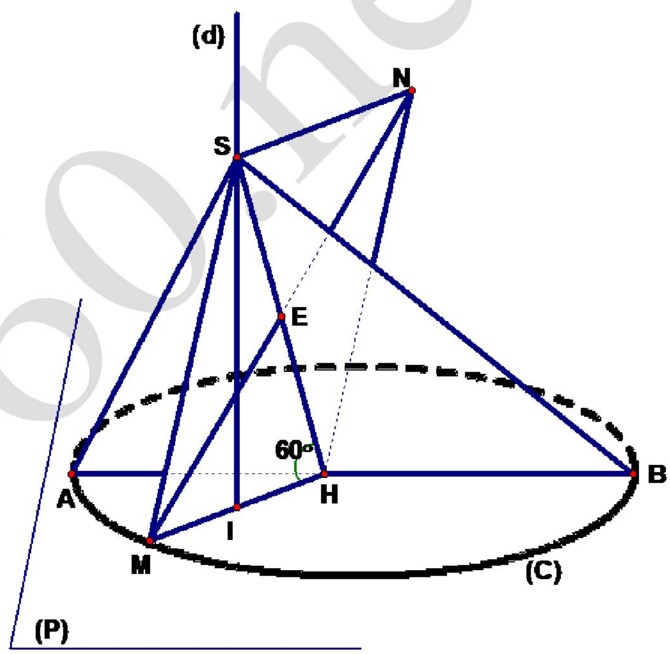
Ví dụ 6.1.1 Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) đường kính AB; M là một điểm di động trên (C), H là hình chiếu vuông góc của M lên AB. Gọi I là trung điểm của MH và (d) là đường thẳng vuông góc với (P) tại I; trên (d) lấy một điểm S sao cho $SHM = 60^0$. Dựng hình bình hành $SMHN$. Tìm tập hợp các điểm N khi M di động trên đường tròn.

Lời giải.

Ta có : $\begin{cases} AB \perp MH \\ AB \perp SI \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SMH)$

$\Rightarrow SHM = ((SAB),(P))$



Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng cố định AB và hợp với mặt phẳng cố định (P) một góc không đổi $SHM = 60^0$ nên mặt phẳng (SAB) cố định.

Tam giác SMH có $SI \perp MH$ tại trung điểm I của MH nên là tam giác cân , lại có $SHM = 60^0$ nên tam giác SMH là tam giác đều .

Gọi E là giao điểm của MN và SH, vì tứ giác $SMHN$ là hình bình hành nên E là trung điểm của MN và SH, suy ra $MN \perp SH$. Mặt khác $MN \subset (SMH)$ nên $MN \perp AB$, suy ra $MN \perp (SAB)$ tại E và vì E là trung điểm của MN do đó N và M là hai điểm đối xứng qua mặt phẳng (SAB). Lại có tập hợp các điểm M là đường tròn (C), suy ra tập hợp các điểm N là đường tròn (C') đối xứng của đường tròn (C) qua mặt phẳng (SAB)

CÁC BÀI LUYỆN TẬP

1. Tìm số đỉnh, số cạnh và số mặt nhỏ nhất có thể có của một hình đa diện.

2. Tính số đỉnh, số mặt và số cạnh của một khối đa đều diện loại $\{n;p\}$. Từ đó hãy tìm tất cả các đa diện đều loại $\{n;p\}$.

3. Cho (H) là đa diện có $2q+1$ $(q \in \mathbb{N}, q \geq 2)$ mặt , các mặt của nó là những đa giác có đúng p cạnh. Chứng minh p là số chẵn.

4. Cho một hình đa diện có số cạnh, số mặt và số đỉnh lần lượt là $c, m, \tilde{n}$. Chứng minh rằng: a) $c > m$ b) $c > \tilde{n}$

5. Chứng minh rằng không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

6. Chứng minh rằng trong một khối đa diện bất kỳ, tồn tại hai đỉnh mà số cạnh xuất phát từ mỗi đỉnh này bằng nhau.

Bài 2

1. Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba cạnh thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn.

2. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì đó là khối tứ diện .

3. Chứng minh rằng một hình tứ diện không thể có tâm đối xứng

Bài 3

1. Chứng minh rằng một khối đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

2. Chứng minh rằng mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

3. Chứng minh rằng trong một khối đa diện bất kỳ tồn tại mặt có số cạnh nhỏ hơn 6.

Bài 4

1. Cho tứ diện ABCD có $\mathrm{AB}=\mathrm{CD}$, $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$, $\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$. Gọi $\mathrm{A'}, \mathrm{B'}$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên CD; $\mathrm{C'}$ và $\mathrm{D'}$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của C và D lên AB . Chứng minh $\mathrm{A'C'}=\mathrm{B'D'}$ và $\mathrm{A'D'}=\mathrm{B'C'}$

2.Trong mặt phẳng , cho tứ giác lồi ABCD có $\mathrm{ABD}=120^0$, $\mathrm{ABC}=75^0$, $\mathrm{BCD}=60^0$, $\mathrm{AB}=\mathrm{a}$, $\mathrm{CD}=\mathrm{a}\sqrt{2}$. Dựng hai tia Bx, Cy cùng vuông góc với (P) và cùng chiều , trên Bx, Cy lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho góc giữa EF và (P) là 60^0 .Tính độ dài đoạn EF theo a

3. Cho tứ diện đều ABCD . Gọi $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{O}$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và EF . Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trong tứ diện ta có : $\mathrm{MA}+\mathrm{MB}+\mathrm{MC}+\mathrm{MD} \geq \mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC}+\mathrm{OD}.$

Bài 5

1. Cho mặt phẳng (P) , A , B là hai điểm ở cùng một phía đối với mặt phẳng (P). Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất .

2. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến c và một đoạn thẳng AB ở trong (P), song song với c. Gọi O là hình chiếu vuông góc của trung điểm I của AB lên c; Oz là đường thẳng chứa trong (Q) và quay quanh O. Chứng minh rằng $AOz + BOz$ không đổi.

3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, một mặt phẳng (P) không trùng với mặt phẳng (ABC) và cắt các cạnh CA, CB. Gọi a, b, c, h lần lượt là khoảng cách từ A, B, C và G đến mặt phẳng (P). Chứng minh $h = \frac{1}{3}(a + b - c)$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của 6 cạnh $A'B', B'B, BC, CD, DD', D'A'$ cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài 6

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh BC; H là hình chiếu vuông góc của S lên DM và K là điểm đối xứng của H qua D. Tìm tập hợp các điểm K.

2. Trong mặt phẳng (P), cho góc xAx' và một điểm B không thuộc (P). Gọi tia By là ảnh của tia Ax' qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$.Trên hai tia Ax, By lần lượt lấy hai điểm di động M, N sao cho $AM = BN$. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Từ M dựng các đường thẳng song song với SA, SB, SC, các đường thẳng này cắt các mặt SBC, SCA, SAB lần lượt tại các điểm A', B', C'. Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

a) Hãy nêu cách dựng các điểm $A'B'C'$.

b) Tìm tập hợp các điểm G khi M di động trong miền trong của tam giác ABC.

Bài 7

1. Cho mặt phẳng (P) và tứ diện $ABCD$. Với mỗi điểm M thuộc (P) ta xác định điểm N theo công thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$. Tìm tập hợp các điểm N khi M di động trong (P).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông . Gọi M là một điểm di động trên cạnh SA và (P) là mặt phẳng đối xứng của mặt phẳng (MBC) qua đường thẳng SA, H là hình chiếu vuông góc của S lên (P). Tìm tập hợp H khi M di động trên cạnh SA.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành . Gọi M là một điểm di động trên cạnh SA. Mặt phẳng (MCD) cắt SB tại N. Gọi M',N' lần lượt là điểm đối xứng của M,N qua mặt phẳng (SCD). Tìm tập hợp giao điểm E của hai đường thẳng DM' và CN' khi M di động trên cạnh SA.

4. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng d,d' chéo nhau cắt (P) lần lượt tại O và O'. Gọi (Q) là mặt phẳng xác định bởi d và đường thẳng d_1 song song với d' vẽ từ O.

Một đường thẳng Δ di động song song với (P) hay chứa trong (P), cắt d tại A, cắt d' tại A' và gọi M là điểm trên Δ sao cho $\overrightarrow{MA'}=k\overrightarrow{MA}$ (k là số thực cho trước và $k\neq 1$). Đường thẳng d_2 song song với OO' vẽ từ M, cắt mặt phẳng (Q) tại M'. Khi A di động trên d

a) Tìm tập hợp các điểm M'.

b) Tìm tập hợp các điểm M.

5. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A,B,C không nằm trong mặt phẳng song song với (P) và ở về cùng một bên đối với (P). Ba đường thẳng song song vẽ từ A,B,C cắt (P) lần lượt tại A',B',C'. Giả sử những đường thẳng song song ấy di động sao cho $AA'+BB'+CC'=k$, k là một độ dài không đổi.

a) Tìm tập hợp các điểm $A',B'C'$.

b) Tìm tập hợp trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$.