15 CÂU KHOẢNG CÁCH

Câu 1. Trong không gian *Oxyz,* khoảng cách từ điểm *A*(1;− 2; −2) đến mặt phẳng (α): $x+2y-2z-4=0$ bằng:

A. 1 B. 3 C. $\frac{13}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

$$d(A,(\alpha))=\frac{|1.x_A+2.y_A-2.z_A-4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1$$

Câu 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α): $2x-y-2z-4=0$ và (β): $2x-y-2z+2=0$.

A. 2 B. 6 C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Ta lấy điểm *H*(2;0;0) thuộc (α). Khi đó $d\left((\alpha),(\beta)\right)=d\left(H,(\beta)\right)=\frac{|2.2-1.0-2.0+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=2$.

Câu 3. Khoảng cách từ điểm *M*(3;2;1) đến mặt phẳng (*P*): $Ax+Cz+D=0$, $A.C.D\neq 0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $d(M,(P))=\frac{|3A+C+D|}{\sqrt{A^2+C^2}}$ B. $d(M,(P))=\frac{|A+2B+3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

C. $d(M,(P))=\frac{|3A+C|}{\sqrt{A^2+C^2}}$ D. $d(M,(P))=\frac{|3A+C+D|}{\sqrt{3^2+1^2}}$

Câu 4. Tính khoảng cách giữa mặt phẳng (α): $2x-y-2z-4=0$ và đường thẳng *d*: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+4t\\z=-t\end{cases}$.

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 0 D. 2

Hướng dẫn giải

Đường thẳng *d* song song với mặt phẳng (α).

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ của đường thẳng đến mặt phẳng.

Ta lấy điểm *H*(1;2;0) thuộc đường thẳng *d*. Khi đó:

$$d(d,(\alpha))=d(H,(\alpha))=\frac{|2.1-1.2-2.0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{4}{3}$$

Câu 5. Khoảng cách từ điểm *A*(2;4; − 3) đến mặt phẳng (α): $2x+y+2z+1=0$ và (β): $x=0$ lần lượt là $d(A,(\alpha))$, $d(A,(\beta))$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $2.d(A,(\alpha)) = d(A,(\beta))$

B. $d(A,(\alpha)) > d(A,(\beta))$

C. $d(A,(\alpha)) = d(A,(\beta))$

D. $d(A,(\alpha)) = 3.d(A,(\beta))$

Hướng dẫn giải

$$d(A,(\alpha))=\frac{|2.x_A+y_A+2.z_A+1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=1\ ;\ d(A,(\beta))=\frac{|x_A|}{\sqrt{1^2}}=2$$

Kết luận: $d(A,(\beta))=2.d(A,(\alpha))$.

Câu 6. Tìm tọa độ điểm *M* trên trục *Oy* sao cho khoảng cách từ điểm *M* đến mặt phẳng *(P):* $2x-y+3z-4=0$ nhỏ nhất?

A. $M(0;-4;0)$

B. $M(0;4;0)$

C. $M(0;2;0)$

D. $M\left(0;\frac{4}{3};0\right)$.

Hướng dẫn giải

Khoảng cách từ *M* đến (*P*) nhỏ nhất khi *M* thuộc (*P*). Nên *M* là giao điểm của trục *Oy* với mặt phẳng (*P*). Thay *x* = 0, *z* = 0 vào phương trình (*P*) ta được *y* = − 4 . Vậy *M*(0; −4;0).

Cách giải khác

Tính khoảng cách từ điểm *M* trong các đáp án đến mặt phẳng (*P*) sau đó so sánh chọn đáp án.

Câu 7. Khoảng cách từ điểm $M(-4;-5;6)$ đến mặt phẳng (*Oxy*), (*Oyz*) lần lượt bằng:

A. 6 và 4.

B. 6 và 5.

C. 5 và 4.

D. 4 và 6.

Hướng dẫn giải

$d(M,(Oxy)) = |z_M| = 6$; $d(M,(Oyz)) = |x_M| = 4$

Câu 8. Tính khoảng cách từ điểm $A(x_0;\, y_0;\, z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$, với $A.B.C.D \neq 0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $d(A,(P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

B. $d(A,(P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

C. $d(A,(P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + C^2}}$

D. $d(A,(P)) = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

Câu 9. Tính khoảng cách từ điểm $B(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (*P*): y + 1 = 0. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $|y_0 + 1|$

B. $|y_0|$

C. $\dfrac{|y_0 + 1|}{\sqrt{2}}$

D. y_0

Câu 10. Khoảng cách từ điểm $C(-2;0;0)$ đến mặt phẳng (*Oxy*) bằng:

A. 0 B. 2 C. 1 D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Điểm *C* thuộc mặt phẳng (*Oxy*) nên $d(C,(Oxy)) = 0$

Câu 11. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;0)$ đến mặt phẳng (*Oxy*), (*Oyz*), (*Oxz*). Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $d(M,(Oxy)) = 1$

B. $d(M,(Oyz)) = 1$

C. $d(M,(Oxz)) = 2$

D. $d(M,(Oxz)) > d(M,(Oyz))$.

Câu 12. Khoảng cách từ điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (*P*): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $D \neq 0$ bằng 0 khi và chỉ khi:

A. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$

B. $A \notin (P)$

C. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq -D$

D. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$.

Câu 13. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (*Q*) bằng 1. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. (Q): $2x + y + 2z - 3 = 0$

B. (Q): $x + y + z - 3 = 0$

C. (Q): $2x + y - 2z + 6 = 0$

D. (Q): $x + y + z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Dùng công thức khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng, sau đó tính khoảng cách lần lượt trong mỗi trường hợp và chọn đáp án đúng.

Câu 14. Khoảng cách từ điểm $H(1;0;3)$ đến đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3+t\end{cases}$, $t\in R$ và mặt phẳng (*P*): $z-3=0$ lần lượt là $d(H,d_1)$ và $d(H,(P))$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $d(H,d_1)$ = 6. $d(H,(P))$

B. $d(H,(P)) > d(H,d_1)$

C. $d(H,d_1) > d(H,(P))$

D. $d(H,(P))$ = 1.

Hướng dẫn giải

Vì *H* thuộc đường thẳng d_1 và *H* thuộc mặt phẳng (*P*) nên khoảng cách từ điểm *H* đến đường thẳng d_1 bằng 0 và khoảng cách từ điểm *H* đến mặt phẳng (*P*) bằng 0.

Câu 15. Tính khoảng cách từ điểm $E(1;1;3)$ đến đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=4+3t\\z=-2-5t\end{cases}$, $t\in R$ bằng:

A. 0

B. $\frac{4}{\sqrt{35}}$

C. $\frac{5}{\sqrt{35}}$

D. $\frac{1}{\sqrt{35}}$

Hướng dẫn giải

+ Gọi (*P*) là mặt phẳng đi qua *E* và vuông góc với (*P*). Viết phương trình (*P*)

+ Gọi *H* là giao điểm của đường thẳng *d* và (*P*). Tìm tọa độ *H*

+ Tính độ dài *EH.*

Khoảng cách từ điểm $E(1;1;3)$ đến đường thẳng *d* bằng *EH.*

Cách giải khác:

Vì *E* thuộc đường thẳng *d* nên khoảng cách từ điểm $E(1;1;3)$ đến đường thẳng *d* bằng 0.

18 CÂU GÓC

Câu 1. Cho vectơ $\vec{u}(-2;-2;0)$; $\vec{v}\left(\sqrt{2};\sqrt{2};2\right)$. Góc giữa vectơ $\vec{u}$ và vectơ $\vec{v}$ bằng:

A. $135°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $150°$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{-2.\sqrt{2}-2.\sqrt{2}+2.0}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}.\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=135°$.

Câu 2. Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=3\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=-2+t\end{cases}$. Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

A. $60°$. B. $120°$. C. $150°$. D. $30°$.

Hướng dẫn giải

Gọi $\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1; d_2.

$\overrightarrow{u_1}=(1;1;0)$; $\overrightarrow{u_2}=(-1;0;1)$

Áp dụng công thức ta có $\cos(d_1,d_2)=\left|\cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\dfrac{|-1|}{\sqrt{1+1}.\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow(d_1,d_2)=60°$.

Câu 3. Cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $5x+11y+2z-4=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là:

A. $30°$. B. $-30°$. C. $60°$. D. $-60°$.

Hướng dẫn giải

Gọi $\vec{u}$; $\vec{n}$ lần lượt là vectơ chỉ phương, pháp tuyến của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

$\vec{u}=(1;-2;1)$; $\vec{n}=(5;11;2)$

Áp dụng công thức ta có $\sin(\Delta,(P)) = \left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right| = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|1.5-11.2+1.2\right|}{\sqrt{5^2+11^2+2^2}.\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow (\Delta,(P)) = 30°$

Câu 4. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z-1=0; (\beta): x+2y-2z-3=0$. Cosin góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng:

A. $\dfrac{4}{9}$　　B. $-\dfrac{4}{9}$　　C. $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$　　D. $-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải

Gọi $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và (β).

Ta có $\overrightarrow{n_\alpha}(2;-1;2)$; $\overrightarrow{n_\beta}(1;2;-2)$

Áp dụng công thức:

$$\cos((\alpha),(\beta)) = \left|\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|} = \frac{\left|2.1-1.2-2.2\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{(1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{4}{9}.$$

Câu 5. Cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+5z+2=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0; (\beta): x-2z-3=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó:

A. $60°$.　　B. $45°$.　　C. $30°$.　　D. $90°$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{1}{2}+t \\ z = -\dfrac{3}{2}+t \end{cases}$, $t \in R$. Suy ra VTCP của d là $\overrightarrow{u_d}(2;1;1)$

Ta có $\sin(d,(P)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_d}, \vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|2.3+1.4+1.5\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}.\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow (d,(P)) = 60^\circ$.

Câu 6. Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z - 5 = 0$. Điểm $A(1; -2; 2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A và tạo với mặt phẳng (α) một góc $45°$.

A. Vô số. B. 1. C. 2. D. 4.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Gọi $\overrightarrow{n_\beta}(a; b; c)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) cần lập.

$$\cos((\alpha),(\beta)) = \left|\cos(\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|} = \frac{\left|3.a-2.b+2.c\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow 2(3a - 2b + 2c)^2 = 17(a^2 + b^2 + c^2)$

Phương trình trên có vô số nghiệm.

Suy ra có vô số vectơ $\overrightarrow{n_\beta}(a; b; c)$ là véc tơ pháp tuyến của (β). Suy ra có vô số mặt phẳng (β) thỏa mãn điều kiện bài toán

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dựng hình.

Giả sử tồn tại mặt phẳng (β) thỏa mãn điều kiện bài toán. (Đi qua A và tạo với mặt phẳng (α) một góc 45°). Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α). Sử dụng phép quay theo trục Δ với mặt phẳng (β). Ta được vô số mặt phẳng (β') thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 7. Hai mặt phẳng nào dưới đây tạo với nhau một góc $60°$

A. $(P): 2x + 11y - 5z + 3 = 0$ và $(Q): -x + 2y + z - 5 = 0$.

B. $(P): 2x + 11y - 5z + 3 = 0$ và $(Q): x + 2y - z - 2 = 0$.

C. $(P): 2x-11y+5z-21=0$ và $(Q): 2x+y+z-2=0$.

D. $(P): 2x-5y+11z-6=0$ và $(Q): -x+2y+z-5=0$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng.

$$\cos((P),(Q))=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

Xác định các vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q). Thay các giá trị vào biểu thức để tìm giá trị đúng.

Dùng chức năng CALC trong máy tính bỏ túi để hỗ trợ việc tính toán nhanh nhất.

Câu 8. Cho vectơ $\vec{u}(1;1;-2), \vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ có số đo bằng 45°. Một học sinh giải như sau:

Bước 1: Tính $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+1}}$

Bước 2: Góc giữa $\vec{u},\vec{v}$ có số đo bằng 45° nên $\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 1-2m=\sqrt{3(m^2+1)}$ (*)

Bước 3: Phương trình $(*)\Leftrightarrow(1-2m)^2=3(m^2+1)$

$$\Leftrightarrow m^2-4m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2-\sqrt{6}\\ m=2+\sqrt{6}.\end{array}\right.$$

Bài giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Sai ở bước 3. B. Sai ở bước 2. C. Sai ở bước 1. D. Đúng.

Hướng dẫn giải

Phương trình (*) chỉ bình phương được hai vế khi biến đổi tương đương nếu thỏa mãn $1-2m\ge 0$. Bài toán đã thiếu điều kiện để bình phương dẫn đến sai nghiệm $m=2+\sqrt{6}$.