B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Bài toán 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI .

Phương pháp:

Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \text{ và } d_2 : \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}.$$

Ta làm như sau:

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 t' \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 t' \\ z_1 + c_1 t = z_2 + c_2 t' \end{cases}$ (*)

- Nếu (*) có nghiệm duy nhất $(t_0; t'_0)$ thì hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại $A\left(x_1 + a_1 t_0; y_1 + b_1 t_0; z_1 + c_1 t_0\right)$.
- Nếu (*) có vô số nghiệm thì hai đường thẳng d_1 và d_2 trùng nhau
- Nếu (*) vô nghiệm, khi đó ta xét sự cùng phương của hai véc tơ

$$\overrightarrow{u_1} = \left(a_1; b_1; c_1\right) \text{ và } \overrightarrow{u_2} = \left(a_2; b_2; c_2\right).$$

+) Nếu $\overrightarrow{u_1} = k\overrightarrow{u_2} \Rightarrow d_1 // d_2$

+) Nếu $\overrightarrow{u_1} \neq k.\overrightarrow{u_2}$ thì d_1 và d_2 chéo nhau.

Ví dụ 1.3.6. Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$,

1. Cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC = \sqrt{6}$

2. Cho các điểm $A(2;1;0)$, $B\left(1;2;2\right)$, $C\left(1;1;0\right)$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 20 = 0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P)

Lời giải.

1. Cách 1: Phương trình tham số của $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}, t \in R$.

Thay x, y, z vào phương trình (P) ta được :

$$1+2t-2t-t-2=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow C\left(-1;-1;-1\right).$$

Điểm

$M \in \Delta \Leftrightarrow M(1+2t;t;-2-t) \Rightarrow MC=\sqrt{6} \Leftrightarrow (2t+2)^2+(t+1)^2+(t+1)^2=6$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow M(1;0;-2) \Rightarrow d\left(M;(P)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ t=-2 \Rightarrow M(-3;-2;0) \Rightarrow d\left(M;(P)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right..$$

Cách 2: Đường thẳng Δ có $\vec{u}=(2;1;-1)$ là VTCP

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}=(1;-2;1)$ là VTPT

Gọi H là hình chiếu của M lên (P), suy ra $\cos HMC=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|$ nên ta có

$$d(M,(P))=MH=MC.\cos HMC=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

2. Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-1;1;2\right)$, phương trình $AB:\begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=2t \end{cases}$

Vì D thuộc đường thẳng $AB \Rightarrow D\left(2-t;1+t;2t\right) \Rightarrow \overrightarrow{CD}=\left(1-t;t;2t\right)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(P\right):\vec{n}=\left(1;1;1\right)$

Vì C không thuộc mặt phẳng P nên $CD//\left(P\right) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{CD}=0$

$\Leftrightarrow 1.\left(1-t\right)+1.t+1.2t=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Ví dụ 2.3.6 Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$,

1. Cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM

2. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1

Lời giải.

1. Vì $M \in Ox \Rightarrow M(m;0;0)$

Đường thẳng Δ đi qua $N(0;1;0)$ có $\vec{u} = (2;1;2)$ là VTCP nên

$$d(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{NM}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3}$$

Nên

$$d(M,\Delta) = OM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3} = |t| \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = 2$$

.

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán: $M_1(-1;0;0)$, $M_2(2;0;0)$.

2. Đường thẳng Δ_2 qua $A(2;1;0)$ có $\vec{u} = (2;1;2)$ VTCP

Vì

$$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3+t;t;t) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(t+1;t-1;t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}.\vec{u}\right] = (t-2;-2;3-t)$$

Nên $d(M,\Delta_2) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM}.\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 1 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (-2)^2 + (3-t)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow M(4;1;1) \\ t = 4 \Rightarrow M(7;4;4) \end{array}\right..$$

Ví dụ 3. 3.6. Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$:

1. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$

Đề thi ĐH Khối B – 2011

2. Cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2;1;1),\ B(-3;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$

Đề thi ĐH Khối B – 2011

Lời giải.

1. Ta có Δ cắt (P) tại $I(1;1;1)$.

Điểm $M(x;y;3-x-y) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \left(1-x;1-y;x+y-2\right)$

Đường thẳng Δ có $\vec{a} = \left(1;-2;-1\right)$ là VTCP

Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MI}.\vec{a} = 0 \\ MI^2 = 16.14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ (1-x)^2 + (1-y)^2 + (-2+x+y)^2 = 16.14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán: $M(-3;-7;13)$ và $M(5;9;-11)$.

2. Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(-2+t;1+3t;-5-2t)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;-2;1),\ \overrightarrow{AM} = (t;3t;-6-2t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right] = (t+12;-t-6;-t)$

Do đó $S_{\Delta MAB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]\right| = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{(t+12)^2 + (-t-6)^2 + t^2} = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = -12$.

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán: $M(-2;1;-5)$ và $M(-14;-35;19)$.

Ví dụ 4.3.6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) có phương trình : $x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+9}{6}$, $d_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau

Lời giải.

Giả sử $M\left(a;b;c\right)$ là điểm cần tìm.

Vì $M\in\Delta_1\Rightarrow\frac{a+1}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c+9}{6}\Rightarrow\begin{cases}a=b-1\\c=6b-9\end{cases}$

Khoảng cách từ M đến mp (P) là:

$$d=d(M;(P))=\frac{\left|a-2b+2c-1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{\left|11b-20\right|}{3}.$$

Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với Δ_2, ta có:

Suy ra $(Q):2(x-a)+1(y-b)-2(z-c)=0\Leftrightarrow 2x+y-2z+9b-16=0$

Gọi H là giao điểm của (Q) và Δ_2, suy ra tọa độ H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}2x+y-2z+9b-16=0\\\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}\end{cases}\Rightarrow H(-2b+3;-b+4;2b-3)$$

Do đó $MH^2=(3b-4)^2+(2b-4)^2+(4b-6)^2=29b^2-88b+68$

Yêu cầu bài toán trở thành: $MH^2=d^2\Leftrightarrow 29b^2-88b+68=\frac{(11b-20)^2}{9}$

$\Leftrightarrow 261b^2-792b+612=121b^2-440b+400$

$\Leftrightarrow 140b^2-352b+212=0\Leftrightarrow 35b^2-88b+53=0b=1,b=\frac{53}{35}.$

Vậy có 2 điểm thoả mãn là: $M(0;1;-3)$ và $M\left(\frac{18}{35};\frac{53}{35};\frac{3}{35}\right)$.

Ví dụ 5.3.6. Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ_1,Δ_2. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ và $\Delta_2:\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{5}$, tìm giao điểm của chúng (nếu có).

Lời giải.

Đường thẳng Δ_1 qua điểm $M_1(1;-1;5)$ và có $\overrightarrow{u_1}(2;3;1)$ là VTCP.

Đường thẳng Δ_2 qua điểm $M_2(-1;-1;1)$ và có $\overrightarrow{u_2}(4;3;5)$ là VTCP.

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}(-2;0;-4)$ và $\left[\vec{u}_1,\vec{u}_1\right]=(12;-6;-6)$, nên

$$\left[\vec{u}_1,\vec{u}_1\right].\overrightarrow{M_1M_2}=-24+0+24=0$$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại điểm M.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{u_1}(2;\ 3;\ 1), \overrightarrow{u_2}(4;\ 3;\ 5)$ không cùng phương nên hai đường thẳng hoặc cắt nhau, hoặc chéo nhau.

Chuyển hai phương trình về dạng tham số và xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+2u=-1+4v \\ -1+3u=-1+3v \\ 5+u=1+5v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-2v=-1 \\ u-v=0 \\ u-5v=-4 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=-1.$$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $M(3;\ 2;6)$.

Góc giữa hai đường thẳng

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{|8+9+5|}{\sqrt{14}.\sqrt{50}}=\frac{11}{5\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow (\Delta_1,\Delta_2)=\arccos\left(\frac{11}{5\sqrt{7}}\right)\approx 33{,}74^0$$

Ví dụ 6.3.6. Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của $A(2;\ 1;\ 4)$ lên:

1. Mặt phẳng $(P): 2x-y-z+7=0.$

2. Đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}.$

Lời giải.

1. Lập phương trình đường thẳng d đi qua A và $d\perp(P)$. Khi đó điểm H là giao điểm của d và (P).

Vì $\vec{n}_{(P)}(2;-1;-1)$ nên đường thẳng d đi qua $A(2;\ 1;\ 4)$ và $d\perp(P)$ có phương trình là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=4-t \end{cases} (t\in R)$. Điểm $H\in d$ nên $H(2+2t;1-t;4-t)$.

Mà điểm $H\in(P)$ nên $2(2+2t)-(1-t)-(4-t)+7=0 \Leftrightarrow t=-1.$

Vậy tọa độ $H(0;2;\ 5)$.

2. Có hai cách giải.

Cách 1: Lập phương trình mặt phẳng (α) qua A và $(\alpha)\perp\Delta$, tọa độ điểm H là giao của (α) và Δ.

Vì $\vec{u}_{\Delta}(1;\ 1;\ 2)$ nên mặt phẳng (α) qua A và $(\alpha)\perp\Delta$ có phương trình là $x+y+2z-11=0.$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y+2z-11=0 \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3, \\ z=3 \end{cases}$ hay $H(2;3;3)$.

Cách 2: Vì $H \in \Delta$ nên H chỉ phụ thuộc một ẩn. Sử dụng điều kiện $AH \perp \Delta$ ta tìm được tọa độ H.

Vì $H \in \Delta$ nên $H(1+t;\,2+t;\,1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(t-1;t+1;\,2t-3)$.

Vì $AH \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_{\Delta}=0 \Leftrightarrow t-1+t+1+2(2t-3)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Vậy tọa độ $H(2;3;3)$.

Ví dụ 7.3.6. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mp(α). Tìm tọa độ giao điểm của chúng nếu có :

1. $d: \begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z=1+t \end{cases}$ $\qquad (\alpha): 3x+4y-z-2=0$

2. $d: \dfrac{x+10}{-3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$ $\qquad (\alpha): y+4z+17=0$

Lời giải.

Ta kí hiệu $\overrightarrow{u_d}$ là VTCP của đường thẳng Δ, $\overrightarrow{n_\alpha}$ là VTPT của mp(α)

1. **Cách 1 :** Thay phương trình của d vào phương trình của (α) ta có :

$$3(12+4t)+4(9+3t)-1-t-2=0 \Leftrightarrow 23t+69=0 \Leftrightarrow t=-3$$

Vậy d cắt (α) tại $A(0;0;-2)$.

Cách 2 : Ta có : $\overrightarrow{u_d}=(4;3;1)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;4;-1) \Rightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=35 \neq 0$.

Vậy d và (α) cắt nhau.

2. **Cách 1 :** Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x+3y+6z+2=0 \\ x+y+z+5=0 \\ y+4z+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4z-17 \\ 2x-6z-49=0 \\ x-3y-12=0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ này vô nghiệm suy ra $d//(\alpha)$.

Cách 2 : Ta có : $\overrightarrow{u_d}=(-3;4;-1)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(0;1;4) \Rightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=0$

Mặt khác điểm $M(-10;4;1) \in d$ mà $M \notin (\alpha) \Rightarrow d//(\alpha)$.

Ví dụ 8.3.6. Tính khoảng cách từ $A(2;3;-1)$ đến đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{2}$

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $B(3;2;0)$ và có $\vec{u} = (1;3;2)$ là VTCP

Cách 1: Gọi H là hình chiếu của A lên Δ, suy ra $H\left(3+t;2+3t;2t\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(t+1;3t-1;2t+1\right)$

Vì $AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1(t+1)+3(3t-1)+2(2t+1)=0 \Leftrightarrow t=0$

Do đó $\overrightarrow{AH} = (1;-1;1) \Rightarrow d\left(A,\Delta\right) = AH = \sqrt{3}$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(1;-1;1\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right] = \left(-5;-1;4\right)$

Do đó $d\left(A,\Delta\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{\sqrt{(-5)^2+(-1)^2+4^2}}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}} = \sqrt{3}$.

Ví dụ 9.3.6. Tìm m để hai đường thẳng sau cắt nhau và tìm tọa độ giao điểm của chúng :

$$d_1 : \frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{m-1} \qquad d_2 : \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

Lời giải.

Cách 1 :

Ta có ptts của đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 6+2t \\ y = -2+4t \\ z = 3+(m-1)t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 4+4t' \\ y = -t' \\ z = 2+2t' \end{cases}$

Ta có d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} 6+2t = 4+4t' \\ -2+4t = 3-t' \\ 3+(m-1)t = 2+2t' \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Từ hai phương trình đầu của hệ ta tìm được $t = t' = 1$ thay vào phương trình thứ ba ta có : $3+(m-1).1 = 2+2 \Rightarrow m = 2$.

Khi đó tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là : $A\left(8;2;4\right)$.

Cách 2 :

Đường thẳng d_1 có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (2;4;m-1)$ và đi qua $M_1(6;-2;3)$

Đường thẳng d_2 có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (4;-1;2)$ và đi qua $M_2(4;0;2)$

Do đó : $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (m+7;4m-8;-18)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2;2;-1)$

Ta có d_1 và d_2 cắt nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow -2(m+7) + 2(4m-8) + 18 = 0$$

$\Leftrightarrow m = 2$ và tọa độ giao điểm là : $A(8;2;4)$.

Ví dụ 10.3.6 Cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{-3}$ và điểm $A(2;-5;-6)$

1. Tìm tọa độ hình chiếu của A lê đường thẳng Δ

2. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho $AM = \sqrt{35}$

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (2;1;-3)$ là VTCP của đường thẳng Δ

1. **Cách 1.**

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ, suy ra

$H(1+2t;-2+t;-1-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t-1;t+3;-3t+5)$.

Vì $AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + (t+3) - 3(-3t+5) = 0$

$\Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ Vậy $H(3;-1;-4)$.

Cách 2. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ

Suy ra phương trình $(P): 2x + y - 3z - 17 = 0$. Khi đó $H = \Delta \cap (P)$ nên tọa độ của H

là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 3z - 17 = 0 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{-3} \end{cases}$, giải hệ này ta tìm được

$H(3;-1;-4)$.

2. Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(1+2t;-2+t;-1-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2t-1;t+3;-3t+5)$

Nên $AM = \sqrt{35} \Leftrightarrow (2t-1)^2 + (t+3)^2 + (3t-5)^2 = 35$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 2$

- $t = 0 \Rightarrow M(1;-2;-1)$

- $t = 2 \Rightarrow M(5; 0; -7)$.

Ví dụ 11.3.6. Cho tam giác AIB có $A(-a\sqrt{3};\ 0;\ 0)$, $B(a\sqrt{3};\ 0;\ 0)$ và $AIB = 120^0, a > 0$. Điểm I thuộc trục tung và có tung độ âm. Trên đường thẳng qua I song song với trục Oz lấy các điểm C, D sao cho tam giác ABC vuông, tam giác ABD đều và C, D có cao độ dương. Tìm tọa độ các điểm I, C, D.

Lời giải.

Tìm tọa độ điểm I.

Vì I thuộc trục tung và có tung độ âm nên $I(0;\ t;\ 0), t < 0$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(-a\sqrt{3};\ -t;\ 0)$, $\overrightarrow{IB}(a\sqrt{3};\ -t;\ 0)$ nên

$$\cos AIB = \cos(\overrightarrow{IA};\ \overrightarrow{IB}) = \frac{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}}{\left|\overrightarrow{IA}\right|.\left|\overrightarrow{IB}\right|}$$

$$\Leftrightarrow \cos 120^0 = \frac{-3a^2 + t^2}{\sqrt{(-a\sqrt{3})^2 + (-t^2) + 0^2}.\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (-t^2) + 0^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + t^2 = 2(3a^2 - t^2) \Leftrightarrow t^2 = a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \\ t = -a \end{array}\right. \Rightarrow I(0;\ -a;\ 0).$$

Vậy điểm $I(0;\ -a;\ 0)$.

Đường thẳng qua I và song song với trục Oz có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = -a\ (t \in \mathbb{R}). \\ z = t \end{cases}$$

Tìm tọa độ điểm C.

Vì $C \in \Delta$ nên $C(0;\ -a;\ t), t > 0$. Ta có $\overrightarrow{CA}(-a\sqrt{3};\ a;\ -t)$, $\overrightarrow{CB}(a\sqrt{3};\ a;\ -t)$.

Rõ ràng $CA = CB$ nên tam giác ABC phải vuông tại C.

Hay $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + a^2 + t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2}a \\ t = -\sqrt{2}a \end{array}\right.$.

Mà $t > 0$ nên $C(0;\ -a;\ \sqrt{2}a)$.

Tìm tọa độ điểm D. Vì $D \in \Delta$ nên $D(0;\ -a;\ t), t > 0$.

Ta có $\overrightarrow{DA}(-a\sqrt{3};\ a;\ -t)$, $\overrightarrow{DB}(a\sqrt{3};\ a;\ -t)$.

Rõ ràng $DA = DB$ nên tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\left|\overrightarrow{DA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow 3a^2 + a^2 + t^2 = 12a^2 \Leftrightarrow t^2 = 8a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2\sqrt{2}a \\ t = -2\sqrt{2}a \end{array}\right..$$

Mà $t > 0$ nên $D(0;\,-a;\,2\sqrt{2}a)$.

Vậy các điểm cần tìm là $I(0;\,-a;\,0)$, $C(0;\,-a;\,\sqrt{2}a)$, $D(0;\,-a;\,2\sqrt{2}a)$.

Ví dụ 12.3.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$:

1. Cho hai đường thẳng: $d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$; $d_2 : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2. Tìm tọa độ các điểm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho MN song song với $mp(P): x - y + z = 0$ và độ dài $MN = \sqrt{2}$;

2. Cho hai đường thẳng: $d_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$; $d_2 : \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$. Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau tại I. Tìm tọa độ các điểm A, B lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác AIB cân tại I và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$

Lời giải.

1. Đường thẳng d_1 đi qua $O(0;0;0)$ có $\overrightarrow{u_1} = (1;1;2)$ là VTCP,

Đường thẳng d_2 đi qua $A(-1;0;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2} = -2;1;1$

Suy ra $\overrightarrow{OA} = (-1;0;1)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1;-5;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{OA} = 4 \neq 0$

Do đó d_1, d_2 chéo nhau.

Ta có $M \in d_1 \Rightarrow M(t;t;2t)$, $N \in d_2 \Rightarrow N(-1-2s;s;1+s)$

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} MN \,//\, (P) \\ MN = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_p} = 0 \\ MN = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -s \\ \sqrt{(t-s)^2 + 4t^2 + (1-3t)^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Giải hệ và kiểm tra điều kiện song song ta được

$M\left(\frac{4}{7};\frac{4}{7};\frac{8}{7}\right), N\left(\frac{1}{7};-\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$

thỏa mãn.

2. Xét hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-3}{1} \\ \dfrac{x+5}{6}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Vậy d_1 cắt d_2 tại giao điểm $I(1;1;2)$.

d_1 đi qua điểm $M_1(3;3;3)$ có $\overrightarrow{u_1}=(2;2;1)$ là VTCP ;

d_2 đi qua $M_2(-5;-2;0)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(6;3;2)$ là VTCP.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2. Ta có :

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{20}{21}\Rightarrow \sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{\sqrt{41}}{21}$$

Giả sử $IA=IB=a>0$. diện tích của tam giác IAB là

$$S=\frac{1}{2}.IA.IB.\sin\varphi=a^2\frac{\sqrt{41}}{42}=\frac{\sqrt{41}}{42}\Rightarrow a=1.$$

$A\in d_1\Rightarrow A(3+2t;3+2t;3+t)\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(2t+2;2t+2;t+1)$

$$\Rightarrow IA^2=1\Leftrightarrow 9(t+1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{2}{3} \\ t=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.\Rightarrow A_1\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right),\ A_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right).$$

$B\in d_2\Rightarrow B(-5+6t;-2+3t;2t)\Rightarrow \overrightarrow{IB}=(6t-6;3t-3;2t-2)$

$$\Rightarrow IB^2=1\Leftrightarrow 49(t-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{8}{7} \\ t=\dfrac{6}{7} \end{array}\right.\Rightarrow B_1\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right),\ B_2\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right).$$

Vậy có 4 cặp điểm A,B cần tìm là:

$A\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$; $B\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$; $B\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$ hoặc

$A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$; $B\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$; $B\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

Ví dụ 13.3.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$: cho mặt phẳng (α): $3x+2y-z+4=0$ và hai điểm $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB.

1. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (α).
2. Xác định tọa độ điểm K sao cho KI vuông góc với mặt phẳng (α), đồng thời K cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (α).

Lời giải.

1. $\overrightarrow{AB}(-4;\,4;\,0)$ nên đường thẳng AB có phương trình $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Gọi $M = AB \cap (\alpha)$ thì $M(4-t;\,t;\,0)$ và thỏa mãn

$$3(4-t) + 2t - 0 + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 16 \Rightarrow M(-12;\ 16;\ 0).$$

Vậy giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (α) là $M(-12;\ 16;\ 0)$.

2. Trung điểm của AB là $I(2;\,2;\,0)$.

Đường thẳng KI qua I và vuông góc với (α): $3x + 2y - z + 4 = 0$ có phương trình KI : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + 2t \ (t \in R), \\ z = -t \end{cases}$ nên $K(2+3t;\,2+2t;\,-t)$.

Ta có: $d(K,\,(\alpha)) = \dfrac{|3(2+3t) + 2(2+2t) + t + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14}\,|t+1|$.

Mà $OK = d(K,\,(\alpha))$ nên

$$\sqrt{(2+3t)^2 + (2+2t)^2 + t^2} = \sqrt{14}\,|t+1|$$

$$14t^2 + 20t + 8 = 14\left(t^2 + 2t + 1\right) \Leftrightarrow 8t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3}{4} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{4};\,\frac{1}{2};\,\frac{3}{4}\right).$$

Vậy điểm cần tìm là $K\left(-\dfrac{1}{4};\,\dfrac{1}{2};\,\dfrac{3}{4}\right)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau

1. $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ và $d_2 : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{3}$

2. $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{2}$ và $d_2 : \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z+6}{1}$

3. $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$ và $d_2 : \dfrac{2x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Bài 2 Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ_1, Δ_2. Tính góc giữa hai đường thẳng và tìm giao điểm của chúng (nếu có). Biết

1.

2. $\Delta_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ z = 5 + 5t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

3. $\Delta_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z+3}{-3}$ và Δ_2 là giao tuyến của hai mp $(\alpha_1):\ x + y - z = 0$ và $(\alpha_2):\ 2x - y + 2z = 0$.

Bài 3 Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mp (α). Tìm tọa độ giao điểm của chúng nếu có.

1. $d : \dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$; $(\alpha) : x + 2y - 4z + 1 = 0$.

2. $d : \dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ $(\alpha) : x + 2y - 4z + 1 = 0$.

Bài 4.

1. Cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $C(1; -1; -2)$ và đường chéo $BD : \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D biết điểm B có hoành độ dương.

2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A \in d_1$, $B \in d_2$ với

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1};\ d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

Tìm tọa độ các đỉnh A, B của hình bình hành biết đường thẳng chứa cạnh CD có phương trình $CD : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$.

Bài 5 Tính các khoảng cách sau

1. Từ $A(3;2;1)$ đến đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1}$

2. Giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = -3t' \\ y = 3 + t' \\ z = -2 \end{cases}$.

3. Giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ và

$\Delta_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{4}$

4. Giữa $\Delta : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$ và $(\alpha) : x - 4x + 2z + 1 = 0$.

Bài 6

Cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(0; 0; 2)$ và đường thẳng

$\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (CAB) bằng 30^0.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 7

Cho tam giác ABC có $AC: \frac{x-4}{7} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z}{-1}$ và $AB: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết trực tâm của tam giác trùng với gốc tọa độ.