$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=441.$$

Với $t=-\frac{102}{5}$ thì $I\left(-\frac{92}{5};-\frac{87}{5};-\frac{209}{5}\right), R=\frac{\sqrt{20817}}{5}$ nên phương trình mặt cầu: $\left(x+\frac{92}{5}\right)^2+\left(y+\frac{87}{5}\right)^2+\left(z+\frac{209}{5}\right)^2=\frac{20817}{25}$.

Bài 5

1. Vì tâm $I\in\Delta$ nên $I(-2+t;\ 1+2t;\ -1-2t)$.

Mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên : $d(I,\ (\alpha_1))=d(I,\ (\alpha_2))=R$

Suy ra $\frac{|3(-2+t)+2(1+2t)-1-t-6|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{|2(-2+t)+3(1+2t)-1-t|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow |6t-11|=|7t-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6t-11=7t-2\\6t-11=2-7t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-9\\t=1\end{array}\right.$

- Nếu $t=1$ thì $I(-1;\ 3;\ -3), R=\frac{5}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\frac{25}{14}.$$

- Nếu $t=-9$ thì $I(-11;\ -17;\ 17), R=\frac{65}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

$$(x+11)^2+(y+17)^2+(z-17)^2=\frac{4225}{14}.$$

2. Đường thẳng Δ' qua điểm $M(2;\ -3;\ 0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'}(-1;\ 1;\ 1)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}(1;\ 6;\ 5)$ nên $\left[\overrightarrow{IM},\ \vec{u}_{\Delta}\right]=(1;\ -4;\ 5)$, do đó

$$d(I,\ \Delta')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\ \vec{u}_{\Delta'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta'}\right|}=\frac{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\sqrt{14}.$$

Vì mặt cầu cắt Δ' tại hai điểm A, B nên bán kính mặt cầu được xác định theo công thức : $R^2=d^2(I,\ \Delta')+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=14+36=50$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=50.$

3. Đường thẳng d' qua điểm $N(-2;-2;4)$ và có $\overrightarrow{u_{d'}}=(1;1;-4)$ là VTCP

Vì tâm mặt cầu $I\in d$ nên $I(2+t;\ -t;\ 3+2t)$

Ta có $\overrightarrow{MI}=(t+1;\ -t-1;2t-1)$, $\overrightarrow{NI}=(4+t;2-t;-1+2t)$ nên

$$\left[\overrightarrow{NI},\ \vec{u}_{d'}\right]=(2t-7;6t+15;2t+2).$$

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI=d(I,d')=R.$

Do đó $MI=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{NI},\ \vec{u}_{d'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{d'}\right|}$, hay

$$\sqrt{(2t-1)^2+2(1+t)^2}=\frac{\sqrt{(2t-7)^2+(6t+15)^2+(2t+2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}$$

$$\Leftrightarrow 18(6t^2+3)=44t^2+160t+278\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$$

- Với $t=-1$ thì $I(1;1;1), R=9$ nên phương trình mặt cầu

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$$

- Với $t=\dfrac{7}{2}$ thì $I\left(\dfrac{11}{2};-\dfrac{7}{2};10\right), R=\dfrac{3\sqrt{34}}{2}$ nên phương trình mặt cầu

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+\left(z-10\right)^2=\frac{153}{2}.$$

Bài 6 Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Khoảng cách từ I đến (P): $d(I,(P))=\dfrac{|2-4-3-4|}{3}=3<R$

Suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

Gọi H, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đó, suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) nên tọa độ của H là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \\ 2x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;0;2)$. Bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$.

Bài 7 Mặt cầu (S) có tâm $I(1;\ 0;\ 2)$, bán kính $R = 3$.

1. Ta có $d(I;\ (P)) = \dfrac{|2+0+2+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3 = R$ nên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu.

Tiếp điểm M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Gọi $M(x;\ y;\ z)$ thì $\overrightarrow{IM}(x-1;\ y;\ z-2)$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{IM} = t.\vec{n}_{(P)} \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{1} \\ 2x + 2y + z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{11}{9};\ -\dfrac{20}{9};\ \dfrac{17}{9}\right).$$

2. Giả sử (S) cắt đường thẳng Δ tại điểm N.

Vì $N \in \Delta$ nên $N(-3+2t;\ 1+t;\ t)$.

Vì $N \in (S)$ nên $(-4+2t)^2 + (1+t)^2 + (t-2)^2 = 9$, hay

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 2$$

Với $t = 1$ thì $N_1(-1;\ 2;\ 1)$ và với $t = 2$ thì $N_2(1;\ 3;\ 2)$.

Vậy mặt cầu (S) cắt đường thẳng Δ tại $N_1(-1;\ 2;\ 1)$ và $N_2(1;\ 3;\ 2)$.

Bài 8. (α_1): $6x - 3y - 2z - 35 = 0$, (α_1): $6x - 3y - 2z + 63 = 0$.

Vì hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) song song với nhau, nên tâm I mặt cầu cần tìm thuộc mặt phẳng (α): $6x - 3y - 2z + 14 = 0$.

Bán kính mặt cầu cần tìm $R = \dfrac{1}{2}d((\alpha_1),\ (\alpha_2)) = 7$.

1. Tiếp điểm của mặt cầu với (α_1) là $A(5;\ -1;\ -1)$ nên tâm I thuộc đường thẳng d qua $A, d \perp (\alpha_1)$.

Phương trình d: $\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -1 - 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Do đó tâm $I = d \cap (\alpha) = (-1;\ 2;\ 1)$.

Phương trình mặt cầu cần tìm $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$.

2. Gọi $I(a;\ b;\ c)$ là tâm mặt cầu. Ta có

$$\begin{cases} BI = 7 \\ BI = CI \\ I \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 49 \\ 2x + 3y + z - 2 = 0 \\ 6x - 3y - 2z + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{10+10x}{3}, z = 12 + 8x \\ (x-1)^2 + \left(\dfrac{-19-10x}{3}\right)^2 + (14+8x)^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{10+10x}{3}, z = 12+8x \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{1693}{685} \end{array}\right. \end{cases}$$

Suy ra có hai mặt cầu thỏa mãn là

$$(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 49.$$

$$(S): \left(x + \frac{1693}{685}\right)^2 + \left(y - \frac{672}{137}\right)^2 + \left(z + \frac{5324}{685}\right)^2 = 49.$$

Bài 9.

1. Ta có $\vec{n}_{(P)}(1;\, -1;\, 1)$ và $A \in \Delta_1, B \in \Delta_2$ nên

$$A(a;\, a;\, 2a),\ B(-1-2b;\, b;\, 1+b),\ \overrightarrow{AB}(-1-2b-a;\, b-a;\, 1+b-2a).$$

Vì $\Delta // (P)$ và $AB = \sqrt{2}$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)} = 0 \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-2b-a-b+a+1+b-2a = 0 \\ (1+2b+a)^2 + (b-a)^2 + (1+b-2a)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ (1-a)^2 + (-2a)^2 + (1-3a)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ 14a^2 - 8a = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0;\ b = 0 \\ a = \dfrac{4}{7};\ b = -\dfrac{4}{7} \end{array}\right.$$

Nếu $a = b = 0$ thì $A(0;0;0) \in (P)$ nên $\Delta \subset (P)$ (không thỏa mãn).

Nếu $a = \dfrac{4}{7};\ b = -\dfrac{4}{7}$ thì $A\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{4}{7}; \dfrac{8}{7}\right)$, $\overrightarrow{AB}\left(-\dfrac{3}{7}; -\dfrac{8}{7}; -\dfrac{5}{7}\right) = -\dfrac{1}{7}(3;\, 8;\, 5)$

Nên đường thẳng cần tìm là $\Delta: \dfrac{x - \frac{4}{7}}{3} = \dfrac{y - \frac{4}{7}}{8} = \dfrac{z - \frac{8}{7}}{5}$.

2. Ta có $\begin{cases} \Delta \in (Q) \\ \Delta \perp d \end{cases}$ nên $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{u}_d; \vec{n}_{(Q)}\right] = (2;-3;1)$. Như vậy ta cần tìm một điểm mà Δ đi qua.

Giao điểm M của d và (Q) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1} \\ x+y+z+2=0 \end{cases} \Rightarrow M(1;-3;0).$

Gọi (R) là mặt phẳng chứa d và $(R)\perp(Q)$.

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (R) là

$$\vec{n}_{(R)}=\left[\vec{u}_d;\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;-3;1).$$

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (Q) có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'}=\left[\vec{n}_{(R)};\vec{n}_{(Q)}\right]=(-4;-1;5).$

Đường thẳng d' qua M nên có phương trình là $d':\begin{cases} x=1-4t \\ y=-3-t\ (t\in\mathbb{R}). \\ z=5t \end{cases}$

Rõ ràng $\Delta\perp(R)\Rightarrow\Delta\perp d'$, do đó gọi $N=\Delta\cap d'$ thì MN chính là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, hay $MN=\sqrt{42}.$

Tọa độ điểm $N(1-4t;-3-t;5t)$ nên

$$(1-4t-1)^2+(-3-t-3)^2+(5t-0)^2=42 \Leftrightarrow 42t^2=42 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right..$$

Với $t=1$ thì $N(-3;-4;5)$ nên phương trình đường thẳng Δ là

$$\Delta:\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-5}{1}.$$

Với $t=-1$ thì $N(5;-2;-5)$ nên phương trình đường thẳng Δ là

$$\Delta:\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+5}{1}.$$

3. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;1)$ và bán kính $R=3.$

Ta có điểm $C(0;5;0)$, thuộc mặt cầu (S) nên $\Delta\perp IC.$

Vì $\begin{cases} \Delta\perp IC \\ \Delta\perp d_1 \end{cases}$ nên một véc tơ chỉ phương của Δ là

$$\vec{u}_\Delta=\left[\overrightarrow{IC};\vec{u}_{d_1}\right]=(2;3;2).$$

Phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{2}.$