• Nếu $t=29 \Rightarrow -\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AN}\right]=(29;3;16)$ nên phương trình

$(\alpha): 29x+3y+16z-87=0$

• Nếu $t=-19 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AN}\right]=(19;-3;8)$ nên phương trình

$(\alpha): 19x-3y+8z-57=0.$

3. Phương trình mặt phẳng (OBC): $x-y=0$ và phương trình mặt phẳng (ABC): $5x+3y+4z-15=0.$

Vì (α) đi qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ nên (α) cắt cạnh OA và $M\in(\alpha)$ thì $d(M,(OBC))=d(M,(ABC)).$

Gọi $M(x;y;z)$ thì từ điều kiện $d(M,(OBC))=d(M,(ABC))$ suy ra hai mặt phẳng chứa M thỏa mãn là $x+3y-5=0, 10x+3y-z-15=0.$

Mặt phẳng $10x+3y-z-15=0$ cắt OA tại điểm $N\left(\frac{3}{2};0;0\right)$ nằm trong đoạn thẳng OA nên mặt phẳng cần tìm là (α): $10x+3y-z-15=0.$

Bài 6

1. Vì mặt phẳng (α) chứa Ox nên phương trình (α) có dạng: $ay+bz=0$ với $a^2+b^2\neq 0$.

Do $A\in(\alpha)$ nên: $2a+3b=0$, chọn $b=-2\Rightarrow a=3$.

Vậy phương trình của $(\alpha): 3y-2z=0$.

2. **Cách 1:** Vì (α) cách đều C, D nên ta có hai trường hợp:

TH1: $CD//(\alpha)$, khi đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=\vec{n}$ là VTPT của (α)

Mà $\overrightarrow{AB}=(-3;1;-4)$, $\overrightarrow{CD}=(-4;-4;4)\Rightarrow \vec{n}=(-12;28;16)$

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $3x-7y-4z+23=0$

TH 2: $CD\cap(\alpha)=\{I\}$, khi đó ta có được I là trung điểm của CD, suy ra $I(-2;-1;3)$

Mặt phẳng (α) đi qua A, B, I.

Ta có $\overrightarrow{AI}=(-3;-3;0)$, $\overrightarrow{BI}=(0;-4;4)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BI}\right]=(-12;12;12)$

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $x-y-z+4=0$.

Cách 2: Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x-1)+b(y-2)+c(z-3)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a-2b-3c=0 \quad (*)$$

Do $B \in (\alpha)$ nên $-3a+b-4c=0 \Rightarrow b=3a+4c$ (1)

Mặt khác: $d\left(C,(\alpha)\right)=d\left(D,(\alpha)\right)$ nên ta có: $\dfrac{|-a-b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|-5a-5b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+2c=5a+5b-2c \\ a+b+2c=-5a-5b+2c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a+3c=0 \\ a+c=0 \end{array}\right.$

- $4a+3c=0$ ta chọn $c=-4 \Rightarrow a=3, b=-7$, suy ra phương trình (α) là: $3x-7y-4z+23=0$.
- $a+c=0$ ta chọn $c=-1 \Rightarrow a=1, b=-1$, suy ra phương trình của (α) là: $x-y-z+4=0$.

Bài 7

1. Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x+1)+b(y-1)+c(z-1)=0 \quad (1)$$

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $4a-b+c=0 \Rightarrow b=4a+c$

Mặt khác $d\left(C,(\alpha)\right)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2a-b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2a+4c|}{\sqrt{a^2+(4a+c)^2+c^2}}=2$

$\Leftrightarrow (a+2c)^2=17a^2+8ac+2c^2 \Leftrightarrow 8a^2+2ac-c^2=0 \Leftrightarrow c=-2a, c=4a$

- $c=-2a$ ta chọn $a=1 \Rightarrow c=-2, b=2$ nên phương trình $(\alpha): x+2y-2z+1=0$
- $c=4a$ ta chọn $a=1 \Rightarrow c=4, b=8$ nên phương trình $(\alpha): x+8y+4z-11=0$.

2. Ta có $M(x;y;z)$ là một điểm bất kì thuộc (α) khi và chỉ khi

$d\left(M,(P)\right)=d\left(M,(Q)\right) \Leftrightarrow \dfrac{|2x+y+2z-1|}{3}=\dfrac{|x-2y+2z-4|}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y+2z-1=x-2y+2z-4 \\ 2x+y+2z-1=-x+2y-2z+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3y+3=0 \\ 3x-y+4z-5=0 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán:

$$(\alpha_1): x+3y+3=0 \text{ và } (\alpha_2): 3x-y+4z-5=0.$$

3. Gọi E, F là hai điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Khi đó tọa độ của E, F là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x+y+2z-1=0 \\ x-2y+2z-4=0 \end{cases}$ (*)

Cho $x=0$, từ (*) ta có $y=-1, z=1 \Rightarrow E(0;-1;1)$

Cho $x=6$, từ (*) ta có $y=-3, z=-4 \Rightarrow F(6;-3;-4)$

Suy ra $\overrightarrow{EF}=(6;-2;-5)$.

Vì (α) đi qua E, F và vuông góc với (β) nên (α) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{EF}, \vec{a}\right]$ làm

VTPT

Trong đó $\vec{a}=(3;2;-1)$ là VTPT của (β) nên $\vec{n}=(12;-9;18)$

Vậy phương trình của $(\alpha): 4x-3y+6z-9=0$.

Bài 8

1. Vì $(P)//(Q) \Rightarrow (P): 2x-3y-6z+D=0$.

Mà $d(O,(P))=5 \Rightarrow \dfrac{|D|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=5 \Leftrightarrow D=\pm 35$.

Vậy phương trình $(P): 2x-3y-6z\pm 35=0$.

2. Giả sử $(P): ax+by+cz+d=0$.

Ta có $A(2;-1;0), B(5;1;1)$ là điểm chung của (α) và (β)

Vì (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A, B \in (P)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2a-b+d=0 \\ 5a+b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a+d \\ c=-7a-2d \end{cases}$$

Mặt khác: $d\left(M,(P)\right)=\dfrac{7}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\left|\frac{1}{2}c+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{7}{6\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |c+2d|=\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow 27(c+2d)^2=49(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow 27.49a^2=49\left[a^2+(2a+d)^2+(7a+2d)^2\right]$

$\Leftrightarrow 27a^2+32ad+5d^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-d \\ a=-\dfrac{5}{27}d \end{array}\right.$.

- $d=-a \Rightarrow b=a; c=-5a$

Suy ra phương trình $(P): ax+ay-5az-a=0 \Leftrightarrow x+y-5z-1=0$.

- $d=-\dfrac{27}{5}a \Rightarrow b=-\dfrac{17}{5}a; c=-\dfrac{36}{5}a$. Suy ra phương trình

$(P): 5x-17y-36z-27=0$.

Bài 9

1. Mặt phẳng (α) qua $A(1;0;2)$ nên có phương trình dạng:

$$A(x-1)+By+C(z-2)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì (α) qua $B(2;-3;3)$ nên $A-3B+C=0 \Leftrightarrow A=3B-C.$

Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(3B-C,B,C),$ của (β) là $\overrightarrow{n_\beta}=(4,1,1),$ nên

$$\cos 60^0=\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta})=\frac{|4(3B-C)+B+C|}{\sqrt{(3B-C)^2+B^2+C^2}.\sqrt{18}}.$$

Suy ra $\frac{1}{2}=\frac{|4(3B-C)+B+C|}{6\sqrt{5B^2-3BC+C^2}} \Leftrightarrow 9\left(5B^2-3BC+C^2\right)=(13B-3C)^2$

$\Leftrightarrow 124B^2-51BC=0 \Leftrightarrow B=0;\ B=\frac{51}{124}C.$

- Nếu $B=0$ thì chọn $C=-1 \Rightarrow A=1$ nên $(ga): x-z+1=0$.
- Nếu $B=\frac{51}{124}C$ thì chọn $C=124 \Rightarrow A=29$ nên mặt phẳng cần tìm là :

$$(\alpha): 29x+51y+124z-277=0.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là:
$(\alpha): 29x+51y+124z-277=0;\ (\alpha):\ x-z+1=0.$

2. Mặt phẳng (α) qua $C(2;-3;5)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-5)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì $(\alpha)\perp(P)$ nên $A-5B-C=0 \Leftrightarrow A=5B+C$ (1).

Vì góc giữa (α) và (Q) là 45^0 nên $\frac{|2A+2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2).

Thế (1) vào (2) ta có $\frac{|4B+C|}{\sqrt{(5B+C)^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, hay

$$2(4B+C)^2=(5B+C)^2+B^2+C^2 \Leftrightarrow B^2+BC=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B=0\\B=-C\end{array}\right.$$

Nếu $B=0$ thì có phương trình $(\alpha): x+z-7=0.$
Nếu $B=-C$ thì có phương trình $(\alpha): 4x+y-z=0.$

Bài 10 $(P): 2x+y-2z-3=0$ và $A(1;2;-1),\ B(0;1;2), C(-1;-1;0).$

1. $M \in Ox \Rightarrow M(x;0;0)$, $d(M,(P)) = \dfrac{|2x-3|}{3} = 3.$

Các điểm cần tìm $M(6;0;0)$ hoặc $M(-3;0;0)$.

2. $N \in Oy \Rightarrow N(0;y;0)$. Vì $d(N,(P)) = NA$ nên

$$\frac{|y-3|}{3} = \sqrt{1^2 + (2-y)^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow 8y^2 - 30y + 45 = 0.$$

Không tồn tại điểm N thỏa mãn.

3. Gọi $K(x;\ y;\ z)$ ta có hệ $\begin{cases} K \in (P) \\ KB = KC \\ KA = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z - 3 = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 3 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được $K\left(-\dfrac{1}{2}; 2; -1\right)$, $K\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

4. Từ $HA = HB = HC$ với $H(x;y;z)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 3 = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 3 \\ 2x + 2y - 6z = 1 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Bài 11

1. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

* Cho $z = 1 \Rightarrow x = 6,\ y = -4 \Rightarrow A(6;-4;1) \in (Q) \cap (R)$.

* Cho $z = 0 \Rightarrow x = -4,\ y = 3 \Rightarrow B(-4;3;0) \in (Q) \cap (R)$.

Ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng $\Leftrightarrow A, B \in (P)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m + n = -4 \\ 3m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Ta có: $\vec{n} = (1;2;4)$ là VTPT của (P)

Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x-6) + b(y+4) + c(z-1) = 0$$

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $c = -10a + 7b$. Suy ra $\vec{v} = (a; b; -10a + 7b)$ là VTPT của (α)