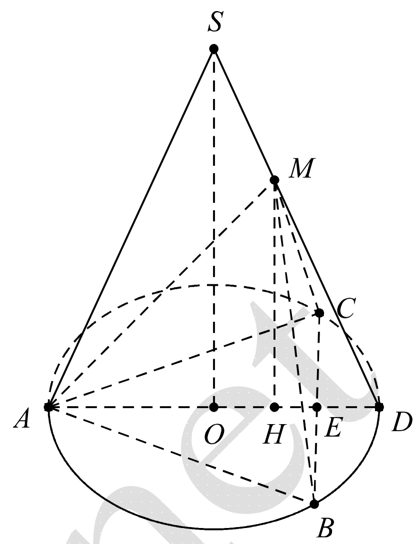
Tam giác ABC cân tại A nên tâm đường tròn nội tiếp H nằm trên đoạn AE.

Vì $CBD = CAD = BAD$ và HB là phân giác nên $HBC = HBA$, nên $HBD = BHD$, do đó $HD = BD = AD.\sin 15^0 < \frac{AD}{2}$, hay $HD < OD \Rightarrow H$ nằm trong đoạn OE, vì thế M nằm trên đường sinh SD.



Gọi V_c, V_n lần lượt là thể tích khối chóp, khối nón.

Ta có: $V_c = \frac{1}{3}MH.\frac{1}{2}AC.AB.\sin 30^0 = \frac{1}{12}MH.AB^2, V_n = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO$

Do đó $\frac{V_c}{V_n} = \frac{1}{4\pi}.\frac{AB^2}{OA^2}.\frac{MH}{SO} = \frac{1}{4\pi}.\frac{AD^2.\cos^2 15^0}{OA^2}.\frac{DH}{DO}$.

Mà $DO = \frac{1}{2}AD, HD = BD$ nên $\frac{DH}{DO} = \frac{2DB}{AD} = 2\sin 15^0$, do đó

$$\frac{V_c}{V_n} = \frac{1}{4\pi}.\frac{AB^2}{OA^2}.\frac{MH}{SO} = \frac{1}{4\pi}.4\cos^2 15^0.2\sin 15^0 = \frac{1}{2\pi}\cos 15^0.$$

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0.\sin 30^0 - \sin 45^0.\cos 30^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $\frac{V_c}{V_n} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8\pi}$.

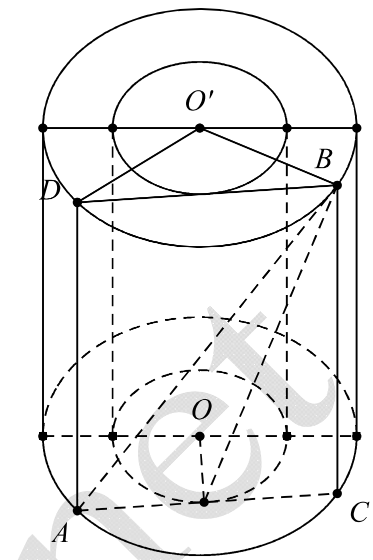
Bài 7

1. Từ A, B ta dựng các đường sinh AD, BC

Ta có $\begin{cases} OA \perp O'B \\ OA \perp OO' \end{cases} \Rightarrow OA \perp OB$, chứng minh tương tự ta có các mặt của tứ diện $OAO'B$ là các tam giác vuông.

Thể tích tứ diện: $V_{OAO'B} = \frac{1}{3}OA.S_{OO'B} = \frac{\sqrt{2}r^3}{6}$.

2. $mp(\alpha)$ chứa AB và song song với OO' chính là $mp(ACBD)$.



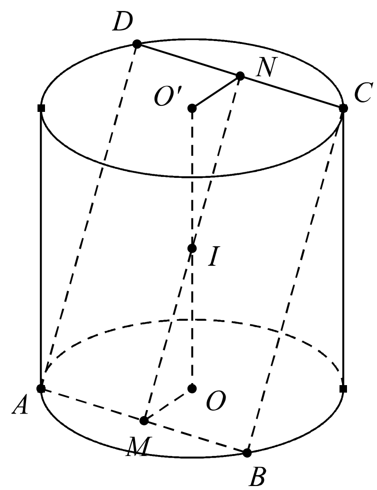
Kẻ $OI \perp AC \Rightarrow d(OO',(\alpha)) = OI = \dfrac{\sqrt{2}r}{2}$.

3. Xét hình trụ T có hai đường tròn đáy tâm là O, O' và bán kính là $\dfrac{\sqrt{2}r}{2}$.

Ta có khoảng cách giữa trục OO' và $mp(\alpha)$ là $OI = \dfrac{\sqrt{2}r}{2}$ nên $mp(\alpha)$ tiếp xúc với hình trụ T.

Bài 8

1. Kẻ $OM \perp AB, O'N \perp CD$ thì $MA = MB, NC = ND$, MN cắt OO' tại trung điểm I của mỗi đường và $MN \perp AB$.



Do đó $NMO = 45^0, IM = \dfrac{a}{2}$. Đặt

$OA = R, OO' = h$

Xét các tam giác vuông OIM, AMO:

$$OM = OI = MI.\sin 45^0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow OO' = h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$R^2 = OA^2 = OM^2 + AM^2 = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

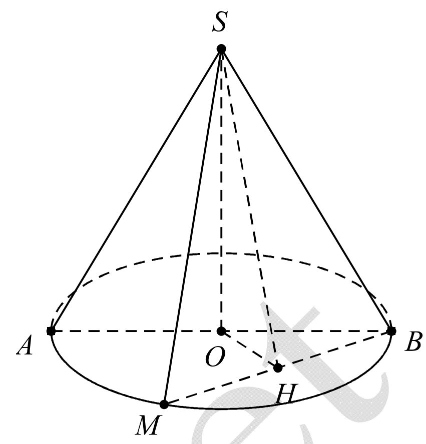
Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Bài 9

1. Giả sử SM là một đường sinh bất kỳ của hình nón .

$ASM = \beta, AM \le AB = 2R$. Ta cần chứng minh $\beta \le \alpha$.

Áp dụng định cosin trong tam giác ta có:



$$AM^2 = SA^2 + SM^2 - 2SA.SM\cos\beta = 2l^2(1-\cos\beta)$$
$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA^2.SB^2\cos\alpha = 2l^2(1-\cos\alpha)$$
$$AM \le AB \Rightarrow 1-\cos\beta \le 1-\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha \le \cos\beta$$

Do $0 < \alpha < 180^0 \Rightarrow \beta \le \alpha$.

2. Diện tích thiết diện $S_0 = \dfrac{1}{2}SA.AB.\sin 120^0 = \dfrac{\sqrt{3}l^2}{4.}$

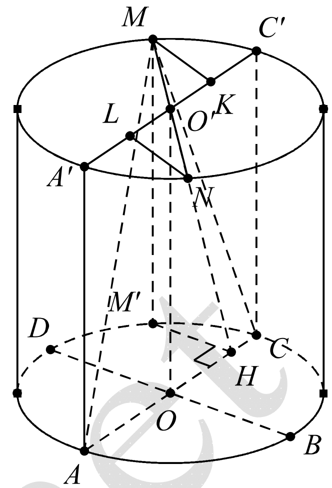
Giả sử S_x là một thiết diện qua đỉnh cắt mặt nón theo hai đường sinh SA, SM.

Đặt $ASM = x$. Diện tích thiết diện $S_x = \dfrac{1}{2}SA.SM.\sin x = \dfrac{l^2\sin x}{2}$.

Ta có $S_x = S_0 \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 60^0; x = 120^0$.

Vậy khi $x = 60^0$ thì $S_x = S_0$.

Bài 11



1. Chiều cao của hình trụ $AA' = h = 2R$. Do đó

$S_{xq\ \text{truï}} = 2\pi Rh = 4\pi R^2$

$S_{tp\ \text{truï}} = S_{xq\ \text{truï}} + 2S_{\text{ñaùy}} = 6\pi R^2$

2. $V_{\text{truï}} = \pi R^2 h = 2\pi R^3$

3. Ta có $AB = R\sqrt{2}, AA' = 2R$ nên thể tích khối lăng trụ là:

$$V = AA'.S_{ABCD} = 4R^3.$$

4. Dựng đường sinh MM' và

$HM' \perp AC\ (H \in AC)$

Khi đó $MH^2 = MM'^2 + M'H^2 = 4R^2 + M'H^2$

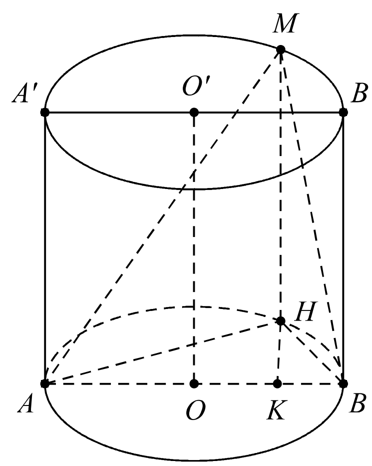
Vì $0 \le M'H \le R \Rightarrow 2R \le MH \le R\sqrt{5}$.

Lại có $S_{\Delta MAC} = \frac{1}{2}AC.MH \Rightarrow 2R^2 \le S_{\Delta MAC} \le R^2\sqrt{5}$

Vậy $\min S_{\Delta MAC} = 2R^2$ đạt được khi $M' \equiv A$ hoaë $M' \equiv C$

$\max S_{\Delta MAC} = \sqrt{5}R^2$ đạt được khi $M' \equiv B$ hoaë $M \equiv D$.

Bài 10



1. Dựng các đường sinh MH, AA', BB'. Kẻ $HK \perp AB$ thì $MK \perp AB$.

Ta có $MK^2 = MH^2 + HK^2 = h^2 + HK^2$

Nên $S_{MAB} = \frac{1}{2}AB.MK$ hay

$S_{MAB} = R.\sqrt{h^2 + HK^2}$.

Vì $0 \le HK \le R$ nên

$Rh \le S_{MAB} \le R.\sqrt{h^2 + R^2}$.

- Diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất là Rh khi M trùng A', hoặc M trùng B'.
- Diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{h^2 + R^2}$ khi điểm M thỏa mãn $OM \perp A'B'$.

2. Chiều cao của khối lăng trụ nội, ngoại tiếp hình trụ bằng chiều cao của hình trụ. Xét đáy của lăng trụ thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ là đa giác đều $A_1A_2...A_n$.

• Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ thì diện tích đa giác $A_1A_2...A_n$ là

$$S_{A_1A_2...A_n}=nS_{A_1OA_2}=\frac{n}{2}.OA_1.OA_2.\sin A_1OA_2=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.nt}=h.S_{A_1A_2...A_n}=\frac{n}{2}hR^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

• Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ngoại tiếp đường tròn $(O;R)$ thì cạnh của đa giác là $2R\tan\frac{\pi}{n}$, nên diện tích đáy là $S_{A_1A_2...A_n}=nS_{A_1OA_2}=nR^2\tan\frac{\pi}{n}$.

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.ngt}=h.S_{A_1A_2...A_n}=nhR^2\tan\frac{\pi}{n}$.

Bài 11

1. Dựng các đường sinh MH, AA', BB'.

Kẻ $HK\perp AB$ thì $MK\perp AB$.

Ta có: $MK^2=MH^2+HK^2=h^2+HK^2$

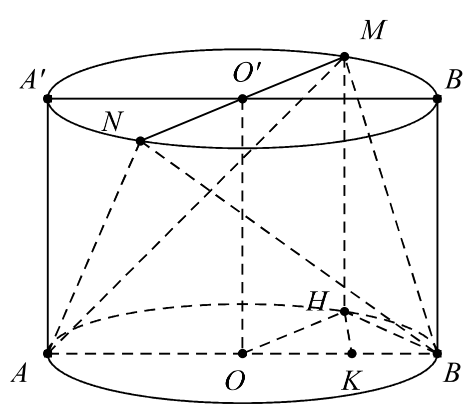
Nên $S_{MAB}=\frac{1}{2}AB.MK$ hay

$S_{MAB}=R.\sqrt{h^2+HK^2}$.

Vì $0\le HK\le R$ nên

$Rh\le S_{MAB}\le R.\sqrt{h^2+R^2}$.

• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất là Rh khi M trùng A' hoặc M trùng B'.



• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{h^2+R^2}$ khi điểm M thỏa mãn $OM\perp A'B'$.

2. Ta có $HK\perp AB, HK\perp O'O$ nên $HK\perp(ABO')$. Do đó khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABO') là HK.

Vì M, N đối xứng với nhau qua O' nên khoảng cách từ M, N đến $A'B'$ bằng nhau. Do đó $V_{ABMN} = V_{ABMO'} + V_{ABNO'} = 2V_{ABMO'}$.

Ta có $V_{ABMO'} = \frac{1}{3}HK.S_{ABO'} = \frac{1}{3}h.R.HK$ và $HK \le R$ nên

$V_{ABMN} = \frac{2}{3}hR.HK \le \frac{2}{3}hR^2$.

Do đó V_{ABMN} đạt giá trị lớn nhất là $\frac{2}{3}hR^2$ khi $MN \perp A'B'$.

3. Chiều cao của khối lăng trụ nội, ngoại tiếp hình trụ bằng chiều cao của hình trụ. Xét đáy của lăng trụ thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ là đa giác đều $A_1A_2...A_n$.

- Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thì diện tích đa giác $A_1A_2...A_n$ là

$$S_{A_1A_2...A_n} = nS_{A_1OA_2} = \frac{n}{2}.OA_1.OA_2.\sin A_1OA_2 = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.nt} = h.S_{A_1A_2...A_n} = \frac{n}{2}hR^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

- Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ thì cạnh của đa giác là $2R\tan\frac{\pi}{n}$, nên diện tích đáy là $S_{A_1A_2...A_n} = nS_{A_1OA_2} = nR^2\tan\frac{\pi}{n}$.

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.ngt} = h.S_{A_1A_2...A_n} = nhR^2\tan\frac{\pi}{n}$.

Vấn đề 3. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHĨP V LĂNG TRỤ.

Bài 1

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), ta có H là tâm của ΔABC.

Nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Trong ΔSAH dựng đường trung trực Ix của cạnh SA. Gọi $O = Ix \cap SH$.

$\begin{cases} O \in SH \\ O \in Ix \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OS = OA \end{cases} \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính $R = SO$. Để tính bán kính R ta có thể thực hiện theo hai cách sau.

Cách 1.

Ta có $SAH = (SA,(ABC)) = 60^0$; $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ (M là trung điểm cạnh BC).

$\Rightarrow SH = AH\tan 60^0 = \frac{\sqrt{3}a}{3}.\sqrt{3} = a, SA = \frac{AH}{\cos 60^0} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Do $\Delta SIO \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SI}{SH} = \frac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SA.SI}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{2a}{3}$.

Vậy bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \frac{2a}{3}$.

Cách 2. Gọi D là giao điểm của AH với mặt cầu, tâm O thuộc mp (SAD) nên đường tròn ngoại tiếp ΔSAD là đường tròn lớn.

Dễ thấy ΔSAD là tam giác đều nên bán kính

$R = \frac{\sqrt{3}SA}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{2a}{3}$.

2. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi I là trung điểm cạnh AC. Trong $mp(SAC)$ kẻ $Ix//SA$.

Ta có Ix là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC, Ix cắt SC tại O. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Bán kính $R = OA$.

$SAB = (SB,(ABC)) = 60^0; SA = AB\tan 60^0 = 3a, AC = \frac{AB}{\sin 30^0} = 2\sqrt{3}a$.

Gọi J là trung điểm $SC \Rightarrow AIOJ$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow R = AO = \sqrt{AJ^2 + AI^2} = \frac{\sqrt{21}a}{2}$.

3. . (Bạn đọc tự vẽ hình)

Vì tam giác AMB vuông tại M nên tâm mặt cầu đi qua ba điểm A, M, B nằm trên Δ_1 là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB, tức là trung trực của AB (xét trong mặt phẳng (ABC)).

Tương tự tâm mặt cầu đi qua A, C, N nằm trên Δ_2 là trung trực của AC trong mặt phẳng (ABC). Gọi $I = \Delta_1 \cap \Delta_2$ thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I cách đều tất cả các điểm A, B, C, M, N nên các