Vì (α) đi qua M nên ta có: $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$ (1)

1. Ta có: M là trọng tâm tam giác $\Leftrightarrow a=3, b=12, c=27$

Nên phương trình của (α) : $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{27}=1 \Leftrightarrow 36x+9y+4z-108=0$

2. Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V=\frac{1}{6}abc$

Từ (1), áp dụng BĐT Cô si ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{36}{abc}} \Rightarrow abc\geq 27.36$

Suy ra $V\geq 6.27=162$. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{4}{b}=\frac{9}{c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow a=3, b=12, c=27$.

Vậy phương trình $(\alpha): 36x+9y+4z-108=0$.

3. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d\left(O,(ABC)\right)=OH\leq OM$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H\equiv M$ hay mặt phẳng (α) đi qua M và nhận $\overrightarrow{OM}$ làm VTPT nên phương trình $(\alpha): x+4y+9z-98=0$.

4. Ta có: $\begin{cases} OA+OC=4OB \\ OA=OB+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=4b \\ a=b+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3b-9 \\ a=b+9 \end{cases}$ thay vào (1) ta có được:

$\frac{1}{b+9}+\frac{4}{b}+\frac{3}{b-3}=1 \Leftrightarrow (b-9)(b^2+7b-12)=0 \Leftrightarrow b=9, b=\frac{-7+\sqrt{97}}{2}$

- $b=9$ ta có phương trình $(\alpha): x+2y+z-18=0$
- $b=\frac{-7+\sqrt{97}}{2}$ ta có phương trình

$(\alpha): \frac{-39-3\sqrt{97}}{36}x+\frac{7+\sqrt{97}}{24}y+\frac{11-\sqrt{97}}{12}-1=0$.

Bài 5

1. Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $OABC$ có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-2pz+q=0.$$

Thay tọa độ các điểm O, A, B, C vào ta có:

$$\begin{cases} a^2 - 2ma + q = 0 \\ b^2 - 2nb + q = 0 \\ c^2 - 2cp + q = 0 \\ p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{a}{2}; \quad n = \dfrac{b}{2} \\ p = \dfrac{c}{2}; \quad q = 0 \end{cases}$$

Suy ra tâm của mặt cầu (S) là $I(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2})$ và bán kính

$$R = IO = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $a^2 + \frac{27}{8a} + \frac{27}{8a} \ge \frac{27}{4} \Leftrightarrow a^2 + \frac{27}{4a} \ge \frac{27}{4}$.

Ta cũng có hai BĐT tương tự : $b^2 + \frac{27}{4b} \ge \frac{27}{4}$; $c^2 + \frac{27}{4c} \ge \frac{27}{4}$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{27}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge \frac{81}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{27}{4} \Rightarrow R \ge \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{2}$. Vậy $\min R = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

2. Ta có thể tích của tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$.

Diện tích toàn phần của tứ diện :

$$S_{tp} = \frac{1}{2}(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2})$$

Suy ra $r = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Từ giả thiết bài toán ta suy ra $ab + bc + ca = 2abc$.

Mặt khác: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2$

Nên $r \le \dfrac{abc}{2abc + \dfrac{2}{\sqrt{3}}abc} = \dfrac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Mặt khác: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 < (ab+bc+ca)^2 = (2abc)^2 \Rightarrow r > \dfrac{abc}{4abc} = \dfrac{1}{4}$.

Bài 6

1. Gọi trọng tâm của tam giác ABC là $G(1;\,-1;\,0)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ nên $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MG}\right|$, nên $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên (P).

Giả sử $M(x;\ y;\ z)$ thì $\overrightarrow{IM} = (x-1;\ y+1;\ z)$

Nên từ $\begin{cases} \overrightarrow{IM} = t.\overrightarrow{n_P} \\ M \in (P) \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2} \\ x - 2y + 2z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;\ 1;\ -2)$.

Vậy điểm $M(0;\ 1;\ -2)$ là điểm cần tìm.

2. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$

Gọi $J(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{JA} = (1-a;\ -b;\ -1-c), \overrightarrow{JB} = (2-a;\ -2-b;\ 1-c), \overrightarrow{JC} = (-a;\ -1-b;\ -c)$

Nên $2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = (-6-a;\ 5-b;\ -6-c)$, suy ra $J(-6;\ 5;\ -6)$.

Vì $2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{MJ}$ nên biểu thức $\left|2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MJ lớn nhất.

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \left(-7;4;-7\right) \Rightarrow JI : \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$ thay vào phương trình (S) ta có

$$49t^2+16t^2+49t^2=\frac{57}{2}\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{2}$$

Suy ra IJ cắt (S) tại hai điểm $E\left(-\frac{5}{2};3;-\frac{5}{2}\right)$, $F\left(\frac{9}{2};-1;\frac{9}{2}\right)$

Do $JE<JF$ nên JM lớn nhất $\Leftrightarrow M\equiv F$

Vậy $M\left(\frac{9}{2};-1;\frac{9}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

Bài 7

1. Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3;\ 6;\ -6)$, $R_1=3$. (S_2) có tâm $I_2(0;\ 0;\ 0)$ và bán kính $R_2=3$.

Ta có $\overrightarrow{I_2I_1}(3;\ 6;\ -6)\Rightarrow I_2I_1=9>R_1+R_2$.

Hai mặt cầu có bán kính bằng nhau, nên mặt cầu cần tìm có tâm I là trung điểm của $I_2I_1\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\ 3;\ -3\right)$, bán kính $R=\frac{I_2I_1}{2}+R_1=\frac{15}{2}$ (mặt cầu (S) tiếp xúc trong với (S_1) và (S_2)).

Phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-3x-6y+6z-36=0$.

2. $A(3;\ -2;\ 1)$, $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;\ 3;\ -2)$. Giả sử Δ cắt d tại $M(1+t;\ 2t-1;\ 1-t)$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}(t-2;\ 2t+1;\ -t)$.

Khoảng cách giữa B và Δ là $d(B,\ \Delta)=\sqrt{\dfrac{35t^2-70t+45}{6t^2+5}}$.

Giá trị lớn nhất là $\sqrt{14}$ khi $t=-\frac{5}{7}$ nên đường thẳng cần tìm

$$\Delta:\frac{x-3}{19}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

Giá trị nhỏ nhất là $\frac{\sqrt{30}}{6}$ khi $t=\frac{7}{6}$ nên đường thẳng cần tìm

$$\Delta:\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-20}=\frac{z-1}{7}.$$

b) Δ' qua $N(1;\,2;\,-1)$ và véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta'}(2;\,-1;\,2)$.

Ta có $\overrightarrow{AN}(-2;\,4;\,-2)$, $\overrightarrow{AM}(t-2;\,2t+1;\,-t)$ nên

$$\left[\vec{u}_{\Delta'},\,\overrightarrow{AM}\right]=(-3t-2;\,4t-4;\,5t).$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là

$$d(\Delta;\Delta')=\frac{\left|\left[\vec{u}_{\Delta'},\,\overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\vec{u}_{\Delta'},\,\overrightarrow{AM}\right]\right|}=\frac{12}{\sqrt{10}}.\sqrt{\frac{(t-1)^2}{5t^2-2t+2}}.$$

Giá trị lớn nhất của $d(\Delta;\Delta')$ là $2\sqrt{2}$ khi $t=-\frac{1}{4}$, hay đường thẳng cần tìm có phương trình $\Delta:\ \frac{x-3}{-9}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$.

c) $\overrightarrow{AM}(t-2;\,2t+1;\,-t)$, $\vec{n}_{(P)}(5;\,2;\,-3)$. Ta có

$$\sin(\Delta,(P))=\left|\cos(\overrightarrow{AM},\,\vec{n}_{(P)})\right|=\frac{4|3t-2|}{\sqrt{38}.\sqrt{6t^2+5}}.$$

Giá trị lớn nhất của góc giữa Δ và mặt phẳng (P) là $\arcsin\frac{46}{\sqrt{95}}$

khi $t=-\frac{5}{4}$, hay đường thẳng cần tìm có phương trình là

$\Delta:\ \frac{x-3}{13}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-1}{-5}$.

Bài 8.

1. Phương trình mặt phẳng (P) qua M có dạng

$$(P):\ A(x-1)+B(y+2)+Cz=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì (P) qua N nên $C=A+2B$.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(A;\ B;\ A+2B)$, $\overrightarrow{n_Q}=(1;\ 2;\ 2)$ là VTPT của (P) và (Q) nên góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là φ thỏa mãn

- Nếu $B=0$ thì $A\neq 0$ nên $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

• Nếu $B \neq 0$ thì đặt $t = \dfrac{A}{B}$, $t \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{(t+2)^2}{2t^2+4t+5}} = \sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{(t+2)^2}{2t^2+4t+5}.$$

Ta tìm được $\max f(t) = \dfrac{5}{6}$ khi $t = \dfrac{1}{2}$, hay $A = \dfrac{1}{2}B$. Chọn $B = 2$ thì $A = 1$ và $C = 5$.

Hay phương trình $(P):\ x + 2y + 5z + 3 = 0$.

2. Tương tự câu 1) ta có phương trình mặt phẳng (P) là

$$A(x-1) + B(y+2) + (A+2B)z = 0,\ A^2 + B^2 + (A+2B)^2 > 0.$$

Ta có $\overrightarrow{u_{d'}} = (2;\ -1;\ 2)$ là VTCP của d' nên góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là α thỏa mãn

$$\sin\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\ \overrightarrow{u_{d'}}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_{d'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{u_{d'}}\right|} = \frac{|4A+3B|}{3.\sqrt{A^2+B^2+(A+2B)^2}} = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(4A+3B)^2}{2A^2+4AB+5B}}$$

• Nếu $B = 0$ thì $A \neq 0$ nên $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

• Nếu $B \neq 0$ thì đặt $t = \dfrac{A}{B}$, $t \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}} = \sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}.$$

Ta tìm được $\max f(t) = \dfrac{25}{3}$ khi và chỉ khi $t = -7$, hay $A = -7B$.

Tức là $(P):\ 7x - y + 5z - 9 = 0$.

Bài 9.

1. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên d và (P). Ta có $d(A,(P)) = AH \leq AK$

Mà AK không đổi nên $d(A,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT

Ta tìm được $K\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AK}=\left(-\frac{5}{3};-\frac{13}{3};\frac{4}{3}\right)$

Vậy phương trình $(P): 5x+13y-4z+21=0$.

2. Vì (Q) chứa d nên phương trình của (Q) có dạng:

$$ax+(a-2c)y+cz+a-4c=0$$

Gọi $\alpha=\left((P),(Oxy)\right)$, ta có: $\cos\alpha=\dfrac{|c|}{\sqrt{2a^2-4ac+5c^2}}$

Nếu $c=0 \Rightarrow \cos\alpha=0$. Với $c\neq 0$ ta có: $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a}{c}-1\right)^2+3}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Nên α nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{c}=1 \Leftrightarrow a=c$ ta chọn $c=1 \Rightarrow a=1$

Vậy phương trình $(Q): x-y+z-3=0$.

3. Phương trình $(R): ax+(a-2c)y+cz+a-4c=0$. Gọi $\beta=\left(Oy,(R)\right)$

Ta có: $\sin\beta=\dfrac{|a-2c|}{\sqrt{2a^2-4ac+5c^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-4ac+4c^2}{2a^2-4ac+5c^2}}$

Nếu $c=0 \Rightarrow \sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Nếu $c\neq 0$, đặt $t=\frac{a}{c}$ và khảo sát hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-4t+4}{2t^2-4t+5}$ ta tìm được

$\max f(t)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$, suy ra β lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$

Chọn $c=-1 \Rightarrow a=1$. Phương trình $(R): x+5y-2z+9=0$.

Bài 10.