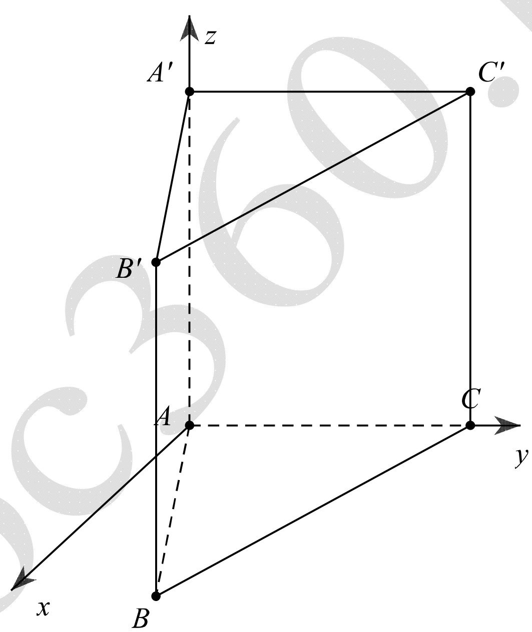
$$\overrightarrow{AI}=\left(-\frac{a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right].\overrightarrow{AI}=-\frac{8a^3}{3}$$

Thể tích khối chóp $IABC$: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right].\overrightarrow{AI}\right|=\frac{4a^3}{9}$

Ta có $\vec{n}=(2;0;-1)$ là VTPT của (IBC), phương trình mặt phẳng (IBC): $2x-z=0$

Vậy $d(A,(IBC))=\frac{2a}{\sqrt{5}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

7. Đặt $AA'=x, x>0$. Chọn hệ trục như hình vẽ



Tọa độ các điểm:

$A(0;0;0)$, $C(0;a;0)$, $A'(0;0;x)$, $C'(0;a;x)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra

$$\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; -x\right), \overrightarrow{A'C} = (0; a; -x) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right] = \left(\frac{ax}{2}; \frac{ax\sqrt{3}}{2}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

Nên $\vec{n} = \left(x; x\sqrt{3}; a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của $(A'BC)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của (ABC)

Theo đề bài: $\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \cos 60^0 \Rightarrow 2\sqrt{3}a = \sqrt{4x^2 + 3a^2} \Rightarrow x = \frac{3a}{2}$

Thể tích lăng trụ: $V_{ABC.A'B'C'} = x.S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Tọa độ trọng tâm $G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

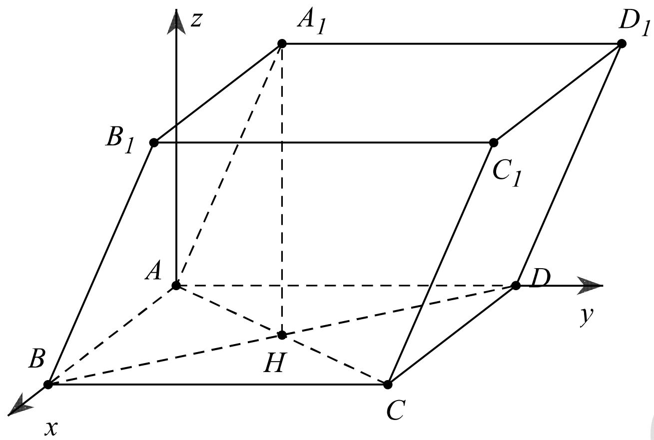
Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$, ta có

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = IG^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-a)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ y = \frac{a}{2} \\ z = -\frac{a}{12} \end{cases}$$

Tâm $I\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{12}\right)$, bán kính $R = IA = \frac{7a}{12}$.

8. Gọi H là tâm của đáy $ABCD$ và đặt $A_1H = x$.

Chọn hệ trục như hình vẽ



Tọa độ các điểm:

$$A(0;0;0),\, B(a;0;0),\, D(0;a\sqrt{3};0),\, C\left(a;a\sqrt{3};0\right),\, H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$$

$$A_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AA_1}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right), \overrightarrow{AD}=\left(0;a\sqrt{3};0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AD}\right]=\left(ax\sqrt{3};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow \vec{n}=\left(2x;0;a\right)$ là VTPT của (A_1AD)

Và $\vec{k}=(0;0;1)$ là VTPT của $(ABCD)$ nên theo giả thiết đề bài ta có:

$$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\cos 60^0 \Rightarrow 2a=\sqrt{4x^2+a^2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Thể tích khối lăng trụ: $V=x.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}a}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{3a^3}{2}$.

$\overrightarrow{A_1B} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; -x\right), \overrightarrow{A_1D} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; -x\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1D}\right] = \left(a\sqrt{3}x; ax; 0\right)$

Phương trình $(A_1BD): x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3} = 0$. Vì

$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow B_1\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Vậy $d\left(B_1, (A_1BD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2

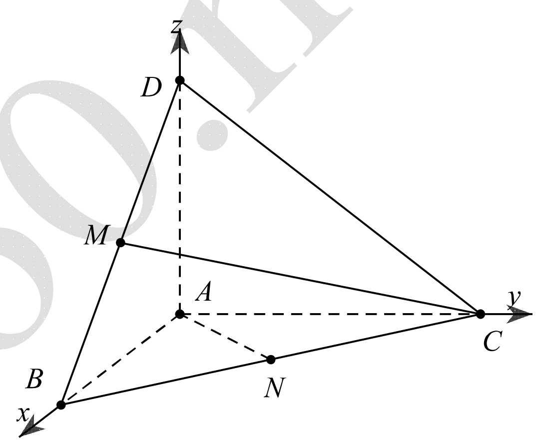
a) Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25$ nên ΔABC vuông tại A.

Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như hình vẽ

Suy ra $O \equiv A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;4)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(BCD): \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$

$\Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$



Do đó: $d\left(A, (BCD)\right) = \frac{|-12|}{\sqrt{16+9+9}} = \frac{12}{\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$

b) Ta có $M\left(0;2;2\right), N\left(\frac{3}{2};2;0\right)$. Suy ra

$\overrightarrow{AN} = \left(\frac{3}{2};2;0\right), \overrightarrow{CM} = \left(0;-2;2\right), \overrightarrow{AC}\left(0;4;0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}\right] = \left(4;-3;-3\right), \left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC} = -12$.

Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng AN, CM là:

$$d(AN, CM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}\right]\right|} = \frac{12}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Góc giữa hai đường thẳng AN, CM là:

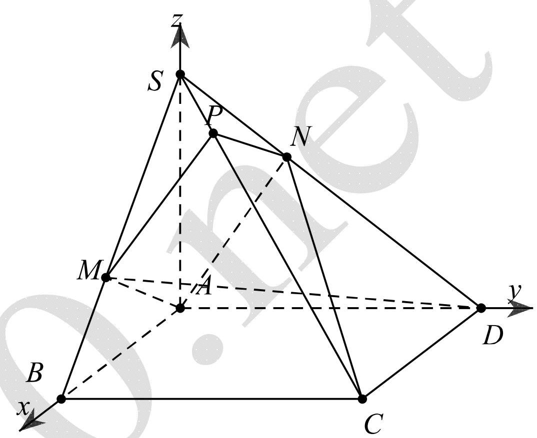
$$\cos(AN, CM) = \frac{\left|\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}\right|}{AN.CM} = \frac{4}{\sqrt{\frac{9}{4}} + 4.\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow (AN, CM) \approx 56^0.$$

Bài 3

1. a) Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ các điểm

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$,

$C(a;2a;0)$, $S(0;0;3a)$



Suy ra $\overrightarrow{SB} = (a;0;-3a)$,

$\overrightarrow{SD} = (0;2a;-3a)$, $\overrightarrow{SC} = (a;2a;-3a)$

Phương trình $SB: \begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -3t \end{cases}$

$\Rightarrow M(a+t;0;-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a+t;0;-3t)$

Mà

$AM \perp SB \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow (a+t) + 9t = 0 \Rightarrow t = -\frac{a}{10} \Rightarrow M\left(\frac{9a}{10};0;\frac{3a}{10}\right)$

Tương tự vậy ta tìm được $N\left(0;\frac{18a}{13};\frac{12a}{13}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = -\frac{27a^2}{65}(1;2;-3)$

Do đó ta có phương trình của $(AMN): x + 2y - 3z = 0$

Phương trình $SC: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \end{cases}$ nên tọa độ điểm P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9a}{14}, y = \frac{9a}{7}, z = \frac{15a}{14} \Rightarrow P\left(\frac{9a}{14}; \frac{9a}{7}; \frac{15a}{14}\right).$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right] = -\frac{27a^2}{70}(1;2;-3)$, $\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}\right] = \frac{27a^2}{91}(1;2;-3)$

Suy ra $S_{AMPN} = \frac{1}{2}\left[\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right]\right| + \left|\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}\right]\right|\right] = \frac{621\sqrt{14}a^2}{1820}$ và

$d(S,(AMN)) = \frac{9a}{\sqrt{14}}$

Vậy $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}.\frac{9a}{\sqrt{14}}.\frac{621\sqrt{14}a^2}{1820} = \frac{1863a^3}{1820}$.

b) Ta có $\overrightarrow{CN} = \left(-a; -\frac{8a}{13}; \frac{12a}{13}\right)$, $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{9a}{10}; -2a; \frac{3a}{10}\right)$, $\overrightarrow{CD} = (-a;0;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}\right] = \left(\frac{348a^2}{65}; \frac{147a^2}{130}; \frac{426a^2}{65}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CD} = -\frac{348a^3}{65}$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng CN, DM là:

$$d(CN, DM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}\right]\right|} = \frac{2332a}{3\sqrt{15209}}.$$

Và $\cos(CN, DM) = \frac{\left|\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{DM}\right|}{CN.DM} = \frac{133}{\sqrt{154570}}$.

2. Vì hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy