còn có ít nhất hai cạnh $C_4;C_5$ khác C_1. Do tính phân biệt của M_2 và M_1 nên $C_4;C_5$ phải khác $C_2;C_3$. Như vậy $C_1;C_2;C_3;C_4;C_5$ khác nhau.

Gọi M_3 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_2 với M_1. Khi đó M_3 có ít nhất hai cạnh $C_6;C_7$ khác C_2 và phân biệt với $C_1;C_3$.

- Nếu C_6 khác với $C_4;C_5$ thì hình (H) có ít nhất 6 cạnh.
- Nếu $C_6 \equiv C_4$ thì do M_3 và M_2 có nhiều nhất một cạnh chung nên C_7 khác $C_4;C_5$ nên (H) có ít nhất 6 cạnh là $C_1;C_2;C_3;C_4;C_5;C_7$.
- Nếu $C_6 \equiv C_5$ thì cũng tương tự trên (H) có ít nhất 6 cạnh.

Vậy hình (H) luôn có ít nhất 6 cạnh.

3. Giả sử mỗi đỉnh của khối đa diện là đỉnh chung của không ít hơn 6 cạnh. Khi đó, gọi $C_1, C_2, ..., C_D$ lần lượt là số cạnh xuất phát từ các đỉnh của khối đa diện thì $C_k \ge 6$ với mọi $k = \{1;2;...;D\}$.

Ta có mỗi cạnh đi qua hai đỉnh nên

$$C = \frac{C_1 + C_2 + ... + C_D}{2} \ge \frac{6D}{2} \Rightarrow D \le \frac{C}{3}.$$

Chứng minh tương tự ta có $M \le \frac{2C}{3} \Rightarrow D + M \le C.$ Điều này không thể xảy ra, nên bài toán được chứng minh.

Bài 4

1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau (c.c.c)

$\Rightarrow$ $AN = BN$ (hai đường trung tuyến tương ứng trong hai tam giác ACD, BCD)

$\Rightarrow$ Tam giác ANB cân tại N

$\Rightarrow$ NM là đường trung trực của AB.

Tương tự MN cũng là đường trung trực của CD.

Thực hiện đối xứng trục MN ,ta có

$A \to B, B \to A, C \to D, D \to C$ (kí hiệu $A \to B$ có nghĩa là B là ảnh của A qua phép biến hình)

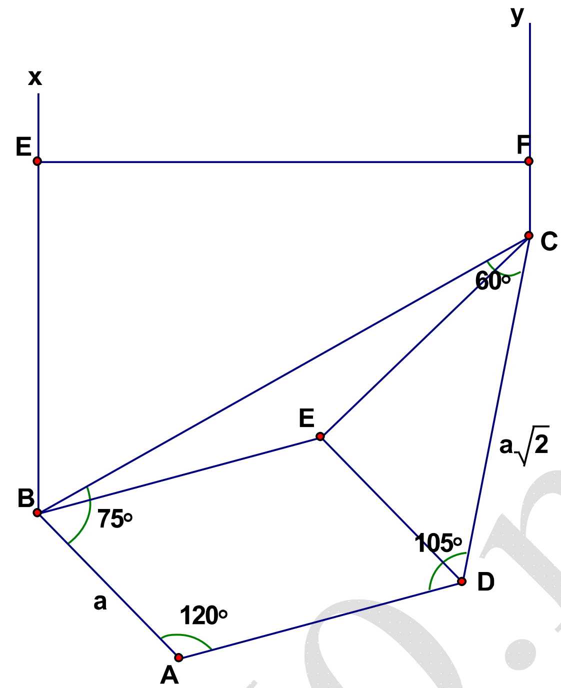
Suy ra $A' = hcA_{/CD} \to B' = hcB_{/CD}$

$C' = hcC_{/AB} \to D' = hcD_{/CD}$

$D' = hcD_{/CD} \to C' = hcC_{/AB}$

$\Rightarrow A'C' \to B'D'$ và $A'D' \to B'C \Rightarrow A'C' = B'D'$ và $A'D' = B'C'$.

2.



Ta có : $ADC = 360^0 - \left(BAD + ABC + DCB\right) = 360^0 - \left(120^0 + 75^0 + 60^0\right) = 105^0$

Thực hiện phép tịnh tiến $\overrightarrow{AD}$. Điểm B biến thành điểm E, khi đó tứ giác ABED là hình bình hành . Suy ra : $DE = AB = a$.

$ADE = ABE = 180^0 - BAD = 60^0 \Rightarrow EDC = ADC - ADE = 105^0 - 60^0 = 45^0$

Tam giác CED có $EDC = 45^0, CD = a\sqrt{2}, DE = a$ nên là tam giác vuông cân tại

$E \Rightarrow ECD = 45^0 \Rightarrow ECB = DCB - ECD = 60^0 - 45^0 = 15^0$

Lại có : $EBC = ABC - ABE = 75^0 - 60^0 = 15^0$

Suy ra tam giác BEC cân tại $E \Rightarrow EB = EC = ED = a$, $BEC = 150^0$.

Áp dụng định lí hàm cosin trong tam giác BEC, ta có:

$BC^2 = EB^2 + EC^2 - 2EB.EC.\cos BEC = 2a^2 - 2a^2\cos 150^0$

$= 2a^2 + 2a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^2\left(2 + \sqrt{3}\right). \Rightarrow BC = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Vì BE, CF cùng vuông góc với (P) nên BC là hình chiếu vuông góc của EF

lên (P), suy ra $BC = EF\cos\left(EF, (P)\right) = EF\cos 60^0$

$$\Rightarrow EF = \frac{BC}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = 2a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

3. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua EF và H là giao điểm của MM' và EF thì H là trung điểm của MM' và $MA + MB = AM + AM'$.
Dựng hình bình hành $AMNM'$,ta có :

$$AM + MN \geq AN = 2AH \Rightarrow AM + AM' \geq 2AH \Rightarrow MA + MB \geq 2AH$$

Tương tự $MC + MD \geq 2CH$
Ta chứng minh $HA + HC \geq OA + OC$.
Dựng $\overrightarrow{EA'} = \overrightarrow{CF}$, ta có tứ giác $EA'FC$ là hình bình hành nên O là trung điểm của $A'C$ và $EA' \perp EF$ (do $EF \perp CF$) suy ra $OA' = OC$
Hai tam giác vuông HEA và HEA' có chung cạnh HE và $EA = EA'$ (cùng bằng CF) nên chúng bằng nhau, suy ra $HA' = HA$. Do đó
$HA + HC = HA' + HC \geq A'C = OA' + OC = OA + OC$.
Suy ra $MA + MB + MC + MD \geq 2(AH + CH)$

$$\geq 2(OA + OC) = OA + OB + OC + OD \text{ (đpcm)}$$

Bài 5

1. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P), ta có $MA = MA'$, suy ra
$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.
$MA + MB = A'B \Leftrightarrow M$ là giao điểm của $A'B$ và (P).
Vậy $\min(MA + MB) = A'B$ đạt được khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

2. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua c, ta có : $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{IO} \Rightarrow I$ là trung điểm của $A'B$.
Vì (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến c; AA' vuông góc c tại trung điểm E của AA'. Từ đó suy ra A và A' đối xứng qua (Q)
$\Rightarrow A'Oz$ là ảnh của AOz qua phép đối xứng qua $(Q) \Rightarrow A'Oz = AOz$.
Trong mặt phẳng xác định bởi Oz và $A'B$ ta có:

$$A'Oz + BOz = 180^0 \Rightarrow AOz + BOz = 180^0$$

3. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (P). Thực hiện phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{DC}$, mặt phẳng (P) biến thành mặt phẳng (P'). Gọi A', B', G' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, G lên mặt phẳng (P'), ta có $AA' = a + c, BB' = b + c, GG' = h + c$. Vì tam giác $A'B'C$ là hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (P'), G là trọng tâm của tam giác ABC nên G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C$. Suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}\\ \overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C}=\overrightarrow{O}\end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C}$$

$$=3\overrightarrow{GG'}+\underbrace{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C}}_{\vec{0}}=3\overrightarrow{GG'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{GG'}\ \left(\text{do } \overrightarrow{CC}=\vec{0}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}\right|=3\left|\overrightarrow{GG'}\right|\ (1)$$

Vì $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|+\left|\overrightarrow{BB'}\right|$

$$(1)\Rightarrow 3\left|GG'\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|+\left|\overrightarrow{BB'}\right|\Rightarrow 3GG'=AA'+BB'$$

$$\Rightarrow 3(h+c)=a+c+b+c\Rightarrow h=\frac{1}{3}(a+b-c).$$

4.

Xét phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{3}{2}$ và gọi A_1, B_1 lần lượt là ảnh của A', B, ta có :

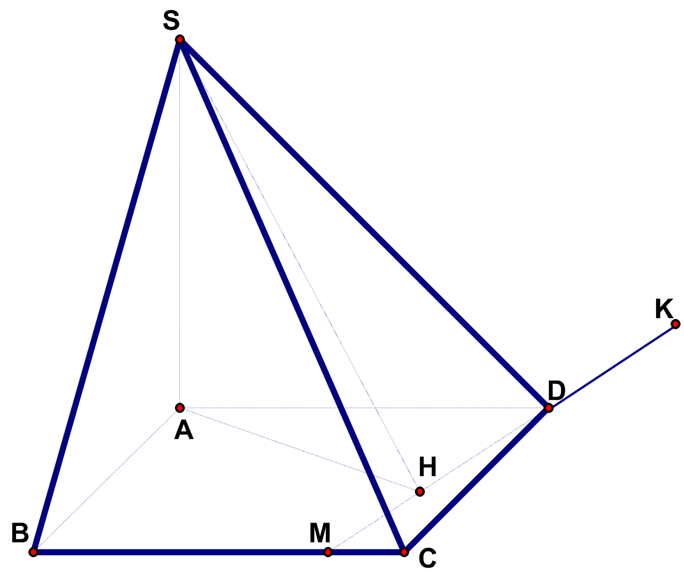
$\overrightarrow{AA_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AB_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow A_1, B_1, M, N$ thẳng hàng

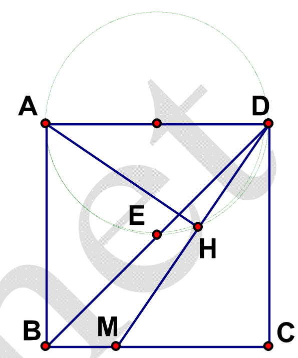
Tương tự gọi D_1 là ảnh của D qua phép vị tự đó thì ta cũng có B_1, D_1P, Q thẳng hàng và A_1, D_1, R, S thẳng hàng .

Vậy phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{3}{2}$ biến mặt phẳng $(A'BD)$ thành mặt phẳng đi qua 6 điểm M, N, P, Q, R, S, từ đó suy ra đpcm.

Bài 6

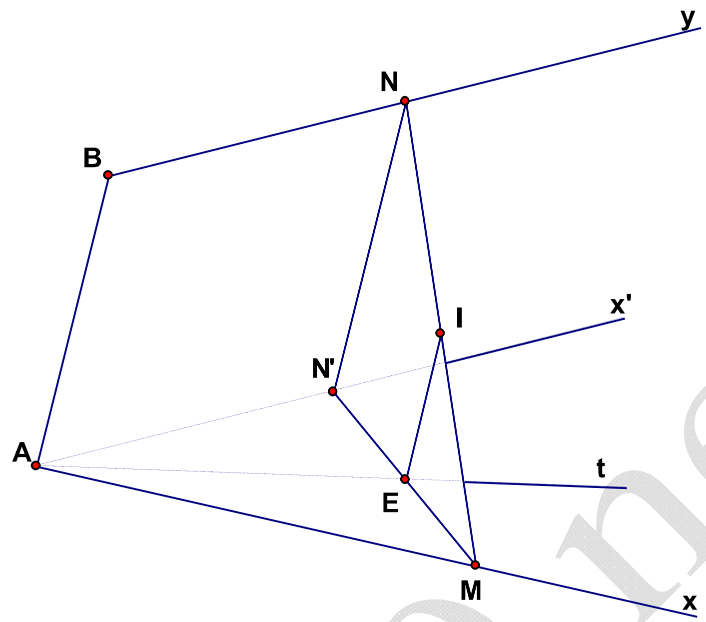
1.





Nối AH, vì $SH \perp DM$ nên theo định lí ba đường vuông góc, ta có $AH \perp DM$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, $AHD = 90^0$, suy ra H thuộc đường tròn (C) đường kính AD.
Mặt khác
Khi $M \equiv B$ thì $H \equiv E$ là giao điểm thứ hai của (C) với BD.
Khi $M \equiv C$ thì $H \equiv D$
Khi M di động trên cạnh BC thì H di động trên cung nhỏ DE của đường tròn (C) chứa trong góc BDC.
Vậy tập hợp các điểm H là cung nhỏ DE của đường tròn (C) chứa trong góc BDC.
Lại có K là điểm đối xứng của H qua điểm D, suy ra tập hợp các điểm K là ảnh của cung nhỏ DE nói trên qua phép đối xứng tâm D.

2.



Tia By là ảnh của tia Ax' qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$ do đó By song song và cùng chiều với tia Ax'. Từ N dựng đường thẳng song song với AB cắt tia Ax' tại N', khi đó tứ giác $ABNN'$ là hình bình hành , suy ra $AN' = BN$. Lại có $BN = AM$, do đó $AM = AN'$, suy ra tam giác AMN' cân tại A. Gọi E là trung điểm của MN' thì E thuộc tia phân giác At của góc $x'Ax$. Vậy tập hợp các điểm E là tia At.

Vì EI là đường trung bình của tam giác MNN' nên $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{N'N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ do đó I là ảnh của E qua phép tịnh tiến $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Suy ra tập hợp các điểm I là ảnh của tia At qua phép tịnh tiến $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

3.