$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -3 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}\right)=(1;-8;5).$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases}AH\perp BC\\ BH\perp CA\\ H\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-2z=-1\\ x+2y+3z=3\\ x-8y+5z=-17\end{cases}$$

Giải hệ ta được $H\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right)$.

3. Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{AI}(x-2;y-3;z-1),\overrightarrow{BI}(x+1;y-2;z),\overrightarrow{CI}(x-1;y-1;z+2)$.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases}AI=BI\\ AI=CI\\ I\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AI^2=BI^2\\ AI^2=CI^2\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+2y+2z=9\\ x+2y+3z=4\\ x-8y+5z=-17\end{cases}$$

Giải hệ ta được $I\left(\frac{14}{15};\frac{61}{30};-\frac{1}{3}\right)$.

4. Trọng tâm G của tam giác ABC có tạo độ thỏa mãn

$$G\left(\frac{2-1+1}{3};\frac{3+2+1}{3};\frac{1+0-2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3};\,2;-\frac{1}{3}\right)$$

Do đó $\overrightarrow{HG}\left(\frac{8}{15};\ \frac{1}{15};\ 0\right),\overrightarrow{GI}\left(\frac{4}{15};\ \frac{1}{30};\ 0\right)$ nên $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GI}$, tức là ba điểm G,H,I nằm trên một đường thẳng.

Bài 7

Vì $C\in(Oxy)$ nên $C(x;y;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;0;-3),\overrightarrow{AC}(x-5;y-3;1),\overrightarrow{BC}(x-2;y-3;4)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $AB=AC=BC$, do đó

$$\begin{cases}AC=AB\\ AC=BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2+1^2=18\\ (x-5)^2+(y-3)^2+1^2=(x-2)^2+(y-3)^2+4^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-3)^2=1\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;\,y=4\\ x=1;\,y=2\end{array}\right..$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1;2;0)$.

a) Gọi $D(x;y;z)$.

Khi đó $\overrightarrow{AD}(x-5;y-3;z+1), \overrightarrow{BD}(x-2;y-3;z+4), \overrightarrow{CD}(x-1;y-2;z)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $ABCD$ là tứ diện đều khi và chỉ khi

$AD = BD = CD = AB = 3\sqrt{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2\\(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\\(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=1-x\\y=16-5x\\(x-5)^2+(13-5x)^2+(2-x)^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1-x\\y=16-5x\\3x^2-16x+20=0\end{cases}$$

Giải phương trình $3x^2-16x+20=0$ ta được $x=2, x=\dfrac{10}{3}$.

Vậy tọa độ các điểm D là $D(2;\ 6;\ -1)$ hoặc $D\left(\dfrac{10}{3};\ -\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{7}{3}\right)$.

b) Gọi $S(x;y;z)$. Ta có

$\overrightarrow{AS}(x-5;y-3;z+1), \overrightarrow{BS}(x-2;y-3;z+4), \overrightarrow{CS}(x-1;y-2;z)$

SA, SB, SC đôi một vuông góc khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BS}=0\\\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{CS}=0\\\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{AS}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)(x-2)+(y-3)^2+(z+1)(z+4)=0\\(x-2)(x-1)+(y-3)(y-2)+(z+4)z=0\\(x-1)(x-5)+(y-2)(y-3)+z(z+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-7x-6y+5z=-23\\x^2+y^2+z^2-3x-5y+4z=-8\\x^2+y^2+z^2-6x-5y+z=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-4z=12\\-3x-3z=-3\\x^2+y^2+z^2-6x-5y+z=-11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=5z+11\\x=1-z\\3z^2+10z+8=0\end{cases}$$

Giải phương trình $3z^2+10z+8=0$ ta được $z=-2; z=-\dfrac{4}{3}$.

Suy ra hai điểm S thỏa mãn là $S(3;1;-2), S\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

Bài 8

a) Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz.

B_1, B_2, B_3 là hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ

$(Oxy), (Oyz), (Ozx)$.

Ta có: $A_1\left(3;0;0\right), A_2\left(0;-2;0\right), A_3\left(0;0;4\right)$ và

$B_1\left(3;-2;0\right), B_2\left(3;0;4\right), B_3\left(0;-2;4\right)$

b) Do $M \in Ox \Rightarrow M\left(m;0;0\right)$, $N \in Oy \Rightarrow N\left(0;n;0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \left(m-3;2;-4\right)$, $\overrightarrow{AN} = \left(-3;n+2;-4\right)$

Tam giác AMN vuông cân tại A nên ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0 \\ AM^2 = AN^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(m-3)+2(n+2)+16=0 \\ (m-3)^2+2^2+(-4)^2=(-3)^2+(n+2)^2+(-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3=\dfrac{2(n+2)+16}{3} \quad (1) \\ \left[\dfrac{2(n+2)+16}{3}\right]^2 = (n+2)^2 + \end{cases}$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 4(n+2)^2+64(n+2)+256=9(n+2)^2+45$

$$\Leftrightarrow 5(n+2)^2-64(n+2)-211=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n+2=\dfrac{32+3\sqrt{231}}{5} \\ n+2=\dfrac{32-3\sqrt{231}}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=\dfrac{22+3\sqrt{231}}{5} \\ n=\dfrac{22-3\sqrt{231}}{5} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{189+6\sqrt{231}}{5} \\ m=\dfrac{189-6\sqrt{231}}{5} \end{array}\right..$$

Vậy có hai bộ thỏa yêu cầu bài toán:

$M_1\left(\dfrac{189+6\sqrt{231}}{15};0;0\right), N_1\left(0;\dfrac{22+3\sqrt{231}}{5};0\right)$ hoặc

$M_2\left(\frac{189-6\sqrt{231}}{15};0;0\right), N_2\left(0;\frac{22-3\sqrt{231}}{5};0\right)$.

c) Vì $E\in(Oyz)$ nên $E\left(0;x;y\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AE}=\left(-3;y+2;z-4\right)$, $\overrightarrow{BE}=\left(1;y-4;z+4\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]=\left(8y+6z-8;4z+8;10-4y\right)$

Nên từ giả thiết bài toán ta

có: $\begin{cases}AE^2=BE^2\\ \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|=3\sqrt{29}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AE^2=BE^2\\ \left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|^2=1044\end{cases}$

$$AE^2=BE^2\Leftrightarrow 9+(y+2)^2+(z-4)^2=1+(y-4)^2+(z+4)^2\Leftrightarrow y=\frac{4z+1}{3}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|^2=1044\Leftrightarrow\left(8y+6z-8\right)^2+(4z+8)^2+\left(10-4y\right)^2=1044$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{50z-16}{3}\right)^2+\left(4z+8\right)^2+\left(\frac{26-16z}{3}\right)^2-1044=0\Leftrightarrow z=2, z=-\frac{34}{25}$$

- $z=2\Rightarrow y=3$ nên $E\left(0;3;2\right)$
- $z=-\frac{34}{25}\Rightarrow y=-\frac{37}{25}$ nên $\left(0;-\frac{37}{25};-\frac{34}{25}\right)$.

Bài 9

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(4;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(x_0;y_0;0)\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=4x_0$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(x_0-4)^2+y_0^2=40\\ \frac{4x_0}{4.\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-8x_0=24\\ \sqrt{2}x_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0^2=x_0^2\\ x_0^2-4x_0-12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=6\\ y_0=6\end{cases}\Rightarrow B\left(6;6;0\right)$$

a) Do $C\in Oz\Rightarrow C(0;0;m)$, $m>0$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(4;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(6;6;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;24)$ và

$\overrightarrow{OC}=(0;0;m)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC} = 24m \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6}.24m = 8 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow C(0;0;2)$.

b) Ta có $G\left(\frac{10}{3};2;0\right)$, $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} = (-4x;0;2x)$

$\Rightarrow M(4-4x;0;2x) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (4-4x;0;2x); \overrightarrow{GM} = \left(\frac{2}{3}-4x;2;2x\right)$

$\Rightarrow OM \perp GM \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{GM} = 0 \Leftrightarrow (4-4x)(\frac{2}{3}-4x)+4x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 20x^2 - \frac{56}{3}x + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 14x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{15}$.