Bài 6

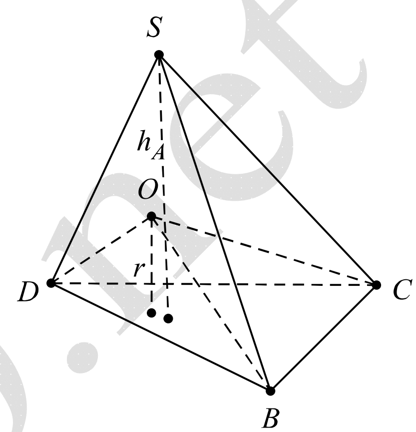
1.

$$\frac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}r.S_{BCD}}{\frac{1}{3}h_A.S_{BCD}}=\frac{r}{h_A},\ \frac{V_{O.CAD}}{V_{ABCD}}=\frac{r}{h_B},\ \frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}}=\frac{r}{h_C},\ \frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}}=\frac{r}{h_D}$$

Suy ra: $\frac{r}{h_A}+\frac{r}{h_B}+\frac{r}{h_C}+\frac{r}{h_D}$

$$=\frac{V_{O.ABC}+V_{O.ABD}+V_{O.ACD}+V_{O.BCD}}{V_{ABCD}}=1$$

Do đó: $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}$.



2. Ta có $V_{S.KMN}+V_{S.KML}=V_{S.NLM}+V_{S.NLK}$ (1)

Vì ABCD là hình bình hành nên

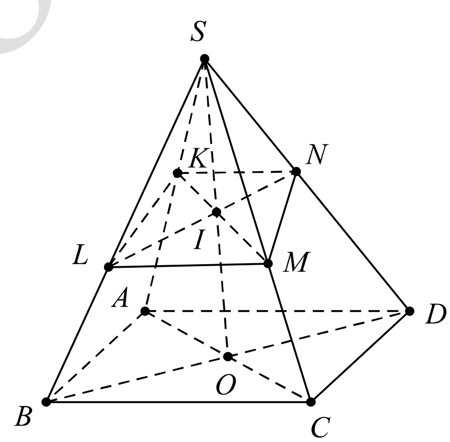
$S_{ACD}=S_{ACB}=S_{ABD}$

$=S_{CBD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Do đó $V_{S.ACD}=V_{S.ACB}=V_{S.ABD}$

$=V_{S.CBD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

Vậy từ (1) ta suy ra:



$$\frac{V_{S.KMN}}{V_{S.ACD}}+\frac{V_{S.KML}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{S.NLM}}{V_{S.DBC}}+\frac{V_{S.NLK}}{V_{S.DBA}}.$$

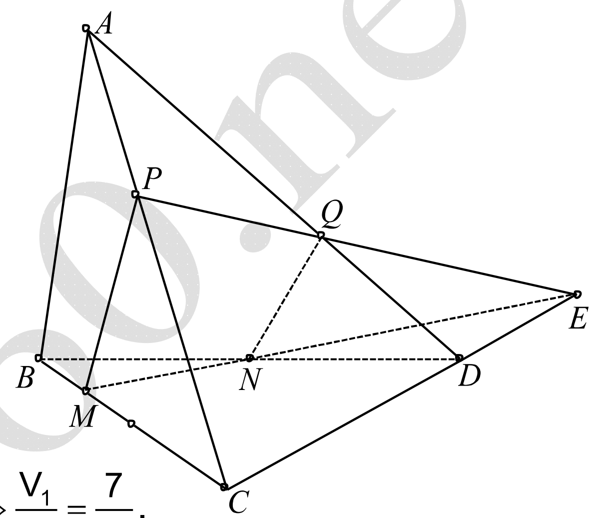
$$\Rightarrow\frac{SK.SM.SN}{SA.SC.SD}+\frac{SK.SM.SL}{SA.SB.SC}=\frac{SN.SL.SM}{SD.SB.SC}+\frac{SN.SL.SK}{SD.SB.SA}$$

$$\Leftrightarrow\frac{SK.SL.SM.SN}{SA.SB.SC.SD}\left(\frac{SB}{SL}+\frac{SD}{SN}\right)=\frac{SK.SL.SM.SN}{SA.SB.SC.SD}\left(\frac{SA}{SK}+\frac{SC}{SM}\right)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{SA}{SK} + \dfrac{SC}{SM} = \dfrac{SB}{SL} + \dfrac{SD}{SN}$ (đpcm).

3. Gọi E là giao điểm của MN và CD. Điểm Q chính là giao điểm của AD và PE. Ta có $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{MB}{MC}.\dfrac{ND}{NB} = \dfrac{1}{3}$ nên $\dfrac{QA}{QD} = \dfrac{PA}{PC}.\dfrac{EC}{ED} = \dfrac{3}{2}$, do đó $\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{3}{5}$.

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $ABCD$, khối đa diện chứa điểm A và khối đa diện chứa điểm D khi chia khối tứ diện bởi mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện.



Ta có $V_1 = V_{ABMN} + V_{AMPN} + V_{APQN}$

Vì $\dfrac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \dfrac{BM.BN}{BC.BD} = \dfrac{1}{8}$

và $\dfrac{S_{MNC}}{S_{BCD}} = \dfrac{3}{8}, \dfrac{S_{DNC}}{S_{BCD}} = \dfrac{1}{2}$

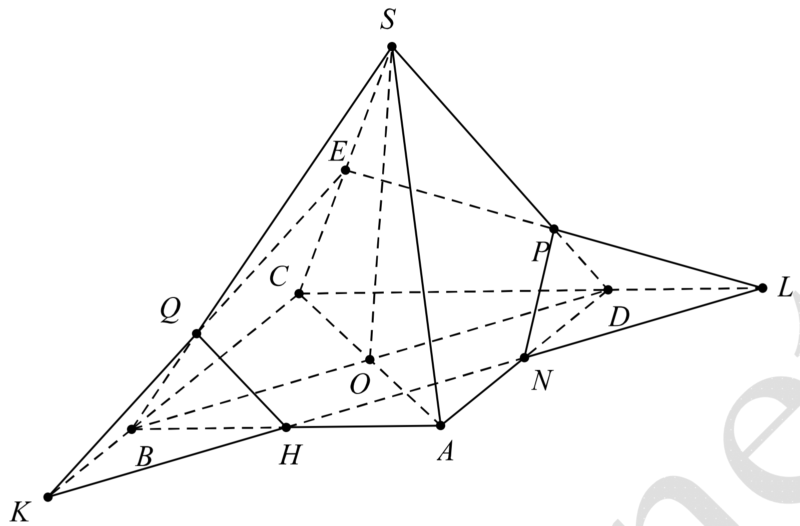
nên $V_{ABMN} = \dfrac{1}{8}V, V_{AMPN} = \dfrac{1}{3}V$

$V_{APQN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{5}V_{ADNC} = \dfrac{1}{10}V$

$V_1 = \dfrac{7}{20}V \Rightarrow V_1 = \dfrac{7}{20}V, V_2 = \dfrac{13}{20}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{13}$.

Bài 7

1. Đường thẳng MN cắt BC và CD tại K và L; EL cắt SD tại P; EK cắt SB tại Q. Mặt phẳng (MNE) cắt hình chóp theo mặt cắt là ngũ giác NMPEQ.



Đặt $AB = a, SO = h$. Ta có $KB = DL = \frac{a}{2}$.

Hạ $EH//SO \Rightarrow EH$ là đường trung bình của ΔSOC nên $EH = \frac{h}{2}$.

$S_{\Delta CKL} = \frac{1}{2}CK.CL = \frac{1}{2}\frac{3a}{2}\frac{3a}{2} = \frac{9a^2}{8}$;

$V_{ECKL} = \frac{1}{3}EH.S_{CKL} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{9a^2}{8} = \frac{3a^2h}{16}$

Ta có Q là trung điểm của EK nên

$\frac{V_{KBQM}}{V_{KCEL}} = \frac{KB.KQ.KM}{KC.KE.KL} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{KBQM} = \frac{1}{18}V_{KCEL} = \frac{a^2h}{96}$

Tương tự $V_{LNDP} = \frac{a^2h}{96}$

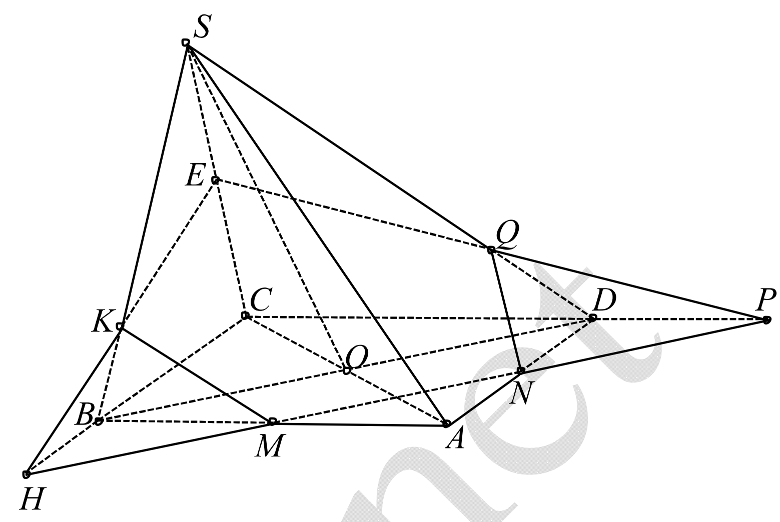
$V_1 = V_{BCDNMQEP} = V_{ECKL} - [V_{KBMQ} + V_{LDNP}] = \frac{3a^2h}{16} - \frac{a^2h}{48} = \frac{a^2h}{6}$

Gọi V_2 là phần thể tích $SEQMANP$ ta có:

Suy ra $V_2 = V_{SABCD} - V_1 = \frac{a^2h}{3} - \frac{a^2h}{6} = \frac{a^2h}{6}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

2. MN cắt CB, CD tại H, P. Nối E với H, P ta có thiết diện là ngũ giác EKMNQ.

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABCD$, khối đa diện chứa điểm C và khối đa diện chứa điểm A khi chia khối chóp bởi (MNE).



Dễ dàng tính được

$\frac{HM}{HP} = \frac{HB}{HC} = \frac{1}{3}$,

$\frac{PN}{PH} = \frac{PD}{PC} = \frac{1}{3}$,

$\frac{HK}{HE} = \frac{PQ}{PE} = 1$

$$\frac{V_{C.EHP}}{V_{C.SBD}} = \frac{CE}{CS}.\frac{CH}{CB}.\frac{CP}{CD} = \frac{9}{8} \Rightarrow V_{C.EHP} = \frac{9}{16}V$$

$$\frac{V_{H.KBM}}{V_{H.ECP}} = \frac{HK}{HE}.\frac{HB}{HC}.\frac{HM}{HP} = \frac{1}{18}, \frac{V_{P.DNQ}}{V_{P.CHE}} = \frac{PD}{PC}.\frac{PN}{PH}.\frac{PQ}{PE} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{H.ECP} - V_{H.KBM} - V_{P.DNQ} = \frac{8}{9}V_{C.EHP} = \frac{1}{2}V$$

Vậy tỉ số thể tích của hai phần là $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

Bài 8

1. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

a) Ta có $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AM nên $\frac{SM}{SB} = \frac{SM.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2}$.

$SB^2 = SA^2 + AB^2, \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$.

$$\frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{a^2}{a^2 + c^2} \Rightarrow \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.\frac{a^2}{a^2 + c^2} = \frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}.$$