Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=14,$ nên phương trình (α) là: $x+y+z-14=0.$

- Trường hợp 2: $a=b=-c.$ Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=6,$ nên phương trình (α) là $x+y-z-6=0.$
- Trường hợp 3: $a=-b=c.$ Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-4,$ nên phương trình (α) là $x-y+z+4=0.$
- Trường hợp 4: $a=-b=-c.$ Từ (1) có $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-12,$ nên phương trình (α) là $x-y-z+12=0.$

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn là $x+y+z-14=0,$ và các mặt phẳng

$$x+y-z-6=0, x-y+z+4=0,\ x-y-z+12=0.$$

4. Vì $x_A>0, z_C<0$ nên $a>0, c<0,$ do đó

$$8OA=12OB+16=37OC \Leftrightarrow 8a=12|b|+16=-37c.$$

- Nếu $b>0 \Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{2a-4}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{2a-4}-\frac{37}{2a}=1 \Leftrightarrow a^2+2a-35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-7 \end{array}\right.$$

Vì $a>2$ nên $a=5 \Rightarrow b=2; c=-\frac{40}{37},$ phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$(\alpha): 8x+20y-37z-40=0.$$

- Nếu $b<0 \Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{4-2a}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{4-2a}-\frac{37}{2a}=1 \Leftrightarrow a^2+29a-35=0 \Leftrightarrow a=\frac{-29\pm 3\sqrt{109}}{2}$$

Vì $a>2$ nên không có giá trị thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 8x+20y-37z-40=0.$

Ví dụ 4.8 Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x+2y+z+7=0$

1. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và tìm bán kính của đường tròn đó;

2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;5;-2)$ và (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=5$.

1. Ta có $d(I,(\alpha))=\dfrac{|2+2+1+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=4<R$, suy ra (α) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn tâm H bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(\alpha))}=3$

H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α), suy ra phương trình của HI là:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}$$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t \\ z=1+t \\ 2x+2y+z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=-\dfrac{5}{3} \\ z=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy tâm $H\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

2. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;6;-4)$ nên phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+3t \\ y=2-2t \end{cases}$

Vì $IA<R$ nên mặt phẳng (P) đi qua AB luôn cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính $r=\sqrt{25-d^2(I,(P))}$.

Do đó r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Gọi K,H lần lượt là hình chiếu của I lên AB và (P), ta luôn có $IH\le IK$ nên suy ra $d(I,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Do $H\in AB\Rightarrow H(1+t;-1+3t;2-2t)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(t;3t-2;1-2t)$

Vì $IH\perp AB\Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow t+3(3t-2)-2(1-2t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{7}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\left(\dfrac{4}{7};-\dfrac{2}{7};-\dfrac{1}{7}\right)$

Vậy phương trình $(\alpha): 4x-2y-z-4=0$.

Ví dụ 5.8 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3;

2. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R = 3$.

1.Trục Ox có phương trình: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình (Q): $ay + bz = 0$.

Mặt cầu (S) cắt (Q) theo một đường tròn có bán kính $r = 3 = R$

$\Rightarrow I \in (Q) \Rightarrow a - 2b = 0$, chọn $b = 1 \Rightarrow a = 2$.

Vậy phương trình mp(Q): $2x + y = 0$.

2. Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mp(P) . Suy ra phương trình của $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B.

Khi đó nếu $d(A,(P)) > d(B,(P)) \Rightarrow d(M,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv A$.

Tọa độ giao điểm của Δ và mặt cầu (S) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được hai giao điểm $A(-1;-1;-3)$, $B(3;-3;1)$.

Ta có: $d(A,(P)) = 7 > d(B,(P)) = 1$.

Vậy $d(M,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M(-1;-1;-3)$.

Ví dụ 6.8 Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$ và hai điểm $A(5;-2;6)$, $B(3;-2;1)$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho:

1. $MA + MB$ nhỏ nhất

2. $|MA - MB|$ lớn nhất

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;2)$ là VTPT

Thay tọa độ hai điểm A, B vào vế trái phương trình của (P) ta được 18 và 4 nên hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với (P).

1. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và với mọi điểm $M \in (P)$, ta có $MA = MA'$.

Do đó $\forall M \in (P): MA + MB = A'M + MB \geq A'B$, mà $A'B$ không đổi và đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (P)$, suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$.

Ta có: $AA' \perp (P) \Rightarrow AA': \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của AA' và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \Rightarrow H(1;-1;2) \\ z = 2 \end{cases}$$

H là trung điểm của $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -3 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3;2;-2)$

Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (6;-4;3)$, phương trình $A'B: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{11} \\ y = -\dfrac{14}{11} \\ z = \dfrac{5}{11} \end{cases}$

Vậy $M\left(\frac{21}{11};-\frac{14}{11};\frac{5}{11}\right)$ là điểm cần tìm.

2. Vì A,B nằm về cùng một phía so với (P) nên với mọi $M\in(P)$ ta luôn có

$$\left|AM-MB\right|\le AB\text{, đẳng thức xảy ra khi } M=AB\cap(P).$$

Phương trình $AB:\begin{cases}x=5-2t\\y=-2\\z=6-5t\end{cases}$

Tọa độ $M:\begin{cases}x=5-2t\\y=-2\\z=6-5t\\2x-y+2z-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{17}{7}\\y=-2\\z=-\frac{3}{7}\end{cases}$. Vậy $M\left(\frac{17}{7};-2;-\frac{3}{7}\right)$.

Ví dụ 7.8 Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;1)$, đường thẳng Δ có phương trình : $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất;

2. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất;

3. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1;1;1),N(-1;2;-1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$ là VTPT

Đường thẳng Δ đi qua $B(1;0;-1)$ và có $\vec{u}=(2;1;-1)$ là VTCP.

1. **Cách 1:** Giả sử $\vec{n}=(a;b;c)$ là VTPT của (Q), suy ra phương trình của (Q) có dạng: $a(x-1)+by+c(z+1)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a+c=0$ (1)

Do $\Delta\subset(Q)$ nên $2a+b-c=0\Rightarrow c=2a+b$.

Do đó:

$$d(A,(Q))=\frac{|2c-b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|4a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}=\sqrt{\frac{16a^2+8ab+b^2}{5a^2+4ab+2b^2}}$$

Nếu $b=0\Rightarrow d(A,(Q))=\frac{4}{\sqrt{5}}$

Nếu $b\neq 0$ thì ta đặt $t=\frac{a}{b}$, ta có: $\frac{16a^2+8ab+b^2}{5a^2+4ab+2b^2}=\frac{16t^2+8t+1}{5t^2+4t+2}=f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t\in\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t)=\frac{24t^2+54t+12}{(5t^2+4t+2)^2},\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=-2,t=-\frac{1}{4}$$

Suy ra $\max f(t)=f(-2)=\frac{7}{2}$, do đó $\max d(A,(Q))=\frac{\sqrt{14}}{2}$, đạt được khi $a=-2b$

Chọn $b=-1$ ta tìm được $a=2,c=3$.

Vậy phương trình $(Q):2x-y+3z+1=0$.

Cách 2: Gọi K,H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (Q), khi đó $d(A,(Q))=AH\leq AK$, mà AK không đổi nên $d(A,(Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Dẫn tới (Q) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

Vì $K\in\Delta\Rightarrow K\left(1+2t;t;-1-t\right)\Rightarrow\overrightarrow{AK}=\left(2t;t+1;-t-2\right)$

$$AK\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{AK}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 4t+t+1+t+2=0\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\Rightarrow K\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{AK}=\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$$

Vậy phương trình $(Q):2x-y+3z+1=0$.

2. Cách 1: Tương tự như trên ta có $(Q):ax+by+(2a+b)z+a+b=0$

Gọi $\alpha=\left((P),(R)\right)$, $0^0\leq\alpha\leq 90^0$.