

$$P = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2.3.4 \dots (n+1)}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{2.3.4 \dots (n+1)}{3.4.5 \dots (n+2)}$$
$$= \frac{n+1}{1} \cdot \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

Ví dụ 25. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2 - y^2}{(z+x)(z+y)} + \frac{y^2 - z^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{z^2 - x^2}{(y+z)(y+x)} = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}$$

Giải. Ta có:
$$\frac{x^2 - y^2}{(z+x)(z+y)} = \frac{x^2 - z^2 + z^2 - y^2}{(z+x)(z+y)} = \frac{x-z}{z+y} + \frac{z-y}{z+x}$$

Tương tự:
$$\frac{y^2 - z^2}{(x+y)(x+z)} = \frac{y-x}{x+z} + \frac{x-z}{x+y}; \quad \frac{z^2 - x^2}{(y+z)(y+x)} = \frac{z-y}{y+x} + \frac{y-x}{y+z}$$

Khi đó về trái

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{x-z}{x+y} + \frac{z-y}{y+x} \right) + \left(\frac{y-x}{y+z} + \frac{x-z}{z+y} \right) + \left(\frac{z-y}{z+x} + \frac{y-x}{x+z} \right) \\ &= \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = VP. \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP

Tính tổng

1. Tính tổng :

$$\text{a) } S_1 = \frac{1}{x(x+a)} + \frac{1}{(x+a)(x+2a)} + \frac{1}{(x+2a)(x+3a)} + \dots \\ + \frac{1}{(x+9a)(x+10a)} + \frac{1}{a(x+10a)};$$

$$\text{b) } S_2 = \frac{b}{x(x+a)} + \frac{b}{(x+a)(x+2a)} + \frac{b}{(x+2a)(x+3a)} + \dots \\ + \frac{b}{(x+99a)(x+100a)} + \frac{b}{a(x+100a)}.$$

2. Tính tổng :

$$\text{a) } A = \frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx};$$

$$\text{b) } B = \frac{7}{(1.2)^3} + \frac{19}{(2.3)^3} + \frac{37}{(3.4)^3} + \dots + \frac{3n^2+3n+1}{[n(n+1)]^3}.$$

3. Cho $a_k = \frac{2k+1}{[k(k+1)]^2}$ với $k \geq 1$. Chứng minh rằng tổng $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{99} < 1$.

4. Cho $a_k = 1 - \frac{4}{(2k+1)^2}$ với $k \geq 1$. Chứng minh rằng tích $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{50} > \frac{1}{3}$.

5. Rút gọn biểu thức $A = \frac{xy+2x+1}{xy+x+y+1} + \frac{yz+2y+1}{yz+y+z+1} + \frac{zx+2z+1}{zx+z+x+1}$

Tính tích

6. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng :

$$\text{a) } P_1 = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \text{ có giá trị nhỏ hơn } 2.$$

$$\text{b) } P_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2+3n}\right) \text{ có giá trị nhỏ hơn } 3.$$

7. Rút gọn biểu thức với $n \geq 2$

$$A = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1}$$

8. Cho $A = (2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4}) \dots (20^4 + \frac{1}{4})$

$$B = (1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4}) \dots (19^4 + \frac{1}{4})$$

9. Cho $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$,

trong đó a, b, c là các số khác nhau đôi một. Tính tích $\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{y+1}{y-1} \cdot \frac{z+1}{z-1}$.

10. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và a, b, c $\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = (\frac{a}{b} + 1)(\frac{b}{c} + 1)(\frac{c}{a} + 1).$$