Theo ví dụ 39 thì $a^3 - a \,\vdots\, 6$; $b^3 - b \,\vdots\, 6$. Do đó $A \,\vdots\, 6$

b) $a^5b - ab^5 = a^5b - ab - ab^5 + ab$

$$= b\left(a^5 - a\right) - a\left(b^5 - b\right).$$

Theo ví dụ 41 thì $a^5 - a \,\vdots\, 30$; $b^5 - b \,\vdots\, 30$ nên $B \,\vdots\, 30$.

Ví dụ 43. Chứng minh rằng nếu x là một số lẻ thì giá trị của biểu thức $A = x^2 + 4x - 5$ luôn chia hết cho 8.

Giải.

Vì x là số lẻ nên $x = 2k + 1$ ($k \in Z$).

Do đó $A = \left(2k+1\right)2 + 4\left(2k+1\right) - 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 4 - 5$

$$= 4k^2 + 4k + 8k = 4k\left(k+1\right) + 8k.$$

Ta có $k(k+1) \,\vdots\, 2$ vì là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Do đó $4k(k+1) \,\vdots\, 8$; $8k \,\vdots\, 8$ nên $A \,\vdots\, 8$.

Ví dụ 44. Chứng minh rằng với mọi $n \in z$ thì giá trị của biểu thức

$$B = n^3 - 7n + 19 \not\vdots\, 6.$$

Giải

$$B = n^3 - 7n + 19 = \left(n^3 - n\right) - 6n + 19$$

Ta có $n^3 - n \,\vdots\, 6$ (theo ví dụ 39); $6n \,\vdots\, 6$; $19 \not\vdots\, 6$ nên $B \not\vdots\, 6$.

Phương pháp 3 : Sử dụng các hằng đẳng thức mở rộng

Ta có thể sử dụng các hằng đẳng thức mở rộng để chứng minh tính chia hết của các số.

Với a, b $\in$ N ta có :

- $a^n - b^n$ chia hết cho a - b với a $\neq$ b.
- $a^{2n} - b^{2n}$ chia hết cho $a^2 - b^2$ với a $\neq \pm$ b.
- $a^n + b^n$ chia hết cho a + b với n lẻ và a $\neq$ -b.
- $(a+b)^n = B(a) + b^n = a^n + B(b)$.

Ví dụ 45. Chứng minh rằng :

a) $A = 2^n - 1 \vdots 15$ với n là số tự nhiên chia hết cho 4 ;

b) $B = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} \vdots 25$ với n là số tự nhiên lẻ.

Giải

a) Vì n $\vdots$ 4 nên n = 4k (k $\in$ N)

Do đó $A = 2^{4k} - 1 = 16^k - 1$

Ta có $16^k - 1 \vdots 16 - 1$ nên $A \vdots 15$

b) $B = 3^{2n+3} + 24^{n+1} = 27.3^{2n} + 2.2^{4n} = 25.3^{2n} + 2.3^{2n} + 2.2^{4n}$
$= 25.3^{2n} + 2\left(3^{2n} + 4^{2n}\right) = 25.3^{2n} + 2\left(9^n + 16^n\right)$

Vì n lẻ nên $9^n + 16^n \vdots 9 + 16$. Do đó $B \vdots 25$.

Ví dụ 46. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $A = 2^n + 1 \vdots 3$.

Giải.

Ta có $A = 2^n + 1 = (3-1)^n + 1 = B(3) + (-1)^n + 1$

$A \vdots 3 \iff (-1)^n + 1 = 0 \iff$ n là số tự nhiên lẻ.

Ví dụ 47. Tìm số dư khi chia 2^{100} cho 7.

Giải.

Ta thấy 100 chia cho 3 dư 1 nên ta đặt 100 = 3k + 1 ($k \in N$).

Ta có $2^{100} = 2^{3k+1} = 2.2^{3k} = 2.8^k = 2.(7+1)^k = 2.\left[B(7) + 1^k\right] = 2B(7) + 2$.

Vậy số dư trong phép chia 2^{100} cho 7 là 2.

Phương pháp 4: Xét số dư

Để chứng minh biểu thức A(n) chia hết cho a hay không chia hết cho a ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho a.

Chẳng hạn khi chia một số n cho 5 thì số dư có thể là 0, 1, 2, 3, 4 khi đó n được biểu diễn lần lượt là :

n = 5k ; n = 5k + 1 ; n = 5k + 2 ; n = 5k + 3 ; n = 5k + 4.

Để cho gọn ta có thể ghép các trường hợp n = 5k + 1 và n = 5k + 4 thành $5k \pm 1$; các trường hợp n = 5k + 2 và n = 5k + 3 thành $5k \pm 2$.

Lưu ý : Nếu a và b chia cho m có cùng số dư thì $a - b \vdots m$.

Ví dụ 48. Chứng minh rằng với n e N thì $A = 2n + 1 \not\vdots\ 7$;

Giải

- Nếu $n = 3k$ thì $A = 2^{3k} + 1 = 8^{k} - 1 + 2$

  Ta có $8k - 1 \vdots 8 - 1$ hay $8k - 1 \vdots 7$; $2 \not\vdots 7$ nên $A \not\vdots 7$.

- Nếu $n = 3k + 1$ thì $A = 2^{3k+1} + 1 = 2.2^{3k} + 1 = 2.8^{k} - 2 + 3 = 2\left(8^{k} - 1\right) + 3$

  Vì $8k - 1 \vdots 7$; $3 \not\vdots 7$ nên $A \not\vdots 7$.

- Nếu $n = 3k + 2$ thì $A = 2^{3k+2} + 1 = 4.8^{k} - 4 + 5 = 4\left(8^{k} - 1\right) + 5$.

  Vì $8^{k} - 1 \vdots 7$; $5 \not\vdots 7$ nên $A \not\vdots 7$. Vậy với mọi $n \in N$ ta luôn có $A \not\vdots 7$.

Ví dụ 49. Chứng minh rằng với $n \in Z$ thì giá trị của biểu thức $B = n\left(n^{2} + 1\right)(n^{2} + 4)$ luôn chia hết cho 5.

Giải

- Nếu $n = 5k$ thì $B \vdots 5$.
- Nếu $n = 5k \pm 1$ thì nhân tử cuối

  $$n^{2} + 4 = \left(5k \pm 1\right)^{2} + 4 = 25k^{2} \pm 10k + 5 = 5\left(5k^{2} \pm 2k + 1\right) \vdots 5.$$

- Nếu $n = 5k \pm 2$ thì nhân tử thứ hai

  $$\begin{aligned} n^{2} + 1 &= \left(5k \pm 2\right)^{2} + 1 = 25k^{2} \pm 20k + 5 \\ &= 5\left(5k^{2} \pm 4k + 1\right) \vdots 5. \end{aligned}$$

Vậy trong mọi trường hợp thì $B \vdots 5$.

- Trường hợp đặc biệt khi xét các số dư trong phép chia là trường hợp chia một số cho 2. Số dư chỉ có thể là 0 hoặc 1 tuỳ theo số bị chia là chẵn hay lẻ.

Ta có nhận xét với a, b, c $\in$ Z thì:

- Nếu tổng a + b + c là một số chẵn thì trong ba số a, b, c ít nhất cũng có một số chẵn.
- Nếu tổng a + b + c là một số lẻ thì trong ba số a, b, c ít nhất cũng là một số lẻ.

Ví dụ 50. Cho a, b, c $\in$ Z thoả mãn điều kiện a + b + c $\vdots$ 4. Chứng minh rằng :

$$A = (a+b)(b+c)(c+a) - abc \vdots 4.$$

Giải

Để vận dụng được điều kiện a + b + c $\vdots$ 4 ta biến đổi biểu thức A về dạng có biểu thức a + b + c.

$$\begin{aligned}
A &= (a+b)(b+c)(c+a) - abc = (ab+ac+b^2+bc)(c+a) - abc \\
&= abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + ab^2 + bc^2 + abc - abc \\
&= (a^2b + abc + a^2c) + (ab^2 + b^2c + abc) + (abc + bc^2 + ac^2) - 2abc \\
&= a(ab+bc+ca) + b(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca) - 2abc \\
&= (a+b+c)(ab+bc+ca) - 2abc.
\end{aligned}$$

Do a + b + c $\vdots$ 4 nên trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Suy ra 2abc $\vdots$ 4.

Mặt khác (a + b + c)(ab + bc + ca) $\vdots$ 4 nên A $\vdots$ 4.

Phương pháp 5 : Dùng nguyên lí Đi-rích-lê(*)