Như vậy nếu một đa thức có nghiệm x = a thì ta có thể phân tích đa thức ấy thành nhân tử bằng phương pháp tách các hạng tử sao cho khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng có nhân tử x - a.

Dựa vào các nhận xét sau ta có thể nhẩm được nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỉ của đa thức f(x) với hệ số nguyên.

1. Nếu đa thức có nghiệm nguyên thì nghiệm nguyên đó phải là ước của hệ số tự do.

Đặc biệt:

- Nếu tổng các hệ số của đa thức bằng 0 thì x = 1 là nghiệm của đa thức.
- Nếu tổng các hệ số bậc lẻ bằng tổng các hệ số bậc chẵn thì x = -1 là nghiệm của đa thức.

Chẳng hạn đa $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ có :

x = 1 là nghiệm vì tổng các hệ số 1 - 3 - 1 + 3 = 0 ;

x = -1 là nghiêm vì tổng các hệ số bậc lẻ bằng các hệ số bậc chẵn :

$$1 + (-1) = (-3) + 3 \;;$$

x = 3 là nghiệm vì $3^3 - 3.3^2 - 3 + 3 = 0$.

Hệ số tự do còn có ước là -3, nhưng ta không cần thử với -3 vì một đa thức bậc ba không quá ba nghiệm.

2. Nếu đa thức có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó có dạng $\frac{p}{q}$ với (p, q) = 1 trong đó p là ước của hạng tử tự do ; q là ước dương của hệ số cao nhất.

Chẳng hạn đa thức $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$. Ta thấy các giá trị nguyên $x = \pm 1$; $x = \pm 2$ đều không phải là nghiệm.

Thử lại các giá trị hữu tỉ $x = \pm\frac{1}{2}$ (± 1 là ước của hạng tử tự do ; 2 là ước dương của hê số cao nhất) ta thấy $x = -\frac{1}{2}$ không phải là nghiêm còn $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của đa thức vì

$$f(\frac{1}{2}) - 2(\frac{1}{2})^2 + 2.\frac{1}{2} - 2 = 0.$$

Do đó $f(x) = (x - \frac{1}{2}).q(x)$ hay f(x) = (2x - 1) . g(x)

Ví dụ 32. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$C = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$$

Giải.

Ta sẽ tách các hạng tử với định hướng là sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng xuất hiện nhân tử 2x - 1. Vì thế ta sẽ tách như sau :

$$C = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 2x^3 - x^2 + 4x^2 - 2x + 4x - 2$$
$$= x^2(2x - 1) + 2x(2x - 1) + 2(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 + 2x + 2).$$

2. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Ví dụ 33. Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $A = x^4 + 4y^4$.

Giải

Ta thấy $x^4 + 4y^4$ có dạng $a^2 + b^2$. Vì vậy có thể thêm bớt hạng tử 2ab để xuất hiện hằng đẳng thức.

$$\text{Ta có } A = x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2$$
$$= \left(x^2 + 2y^2\right)^2 - (2xy)^2 = \left(x^2 + 2y^2 - 2xy\right)\left(x^2 + 2y^2 - 2xy\right).$$

Ví dụ 34. Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $B = x^5 + x + 1$

Giải.

Ta thấy đa thức đã cho là đa thức bậc 5. Đa thức này khuyết các hạng tử bậc 4, bậc 3, bậc 2. Vì vậy có thể chọn thêm bớt hạng tử có bậc bị khuyết. Hợp lí hơn cả là thêm bớt hạng tử bậc 2.

$$\text{Ta có } B = x^5 + x + 1 - x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$$
$$= x^2\left(x^3 - 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right)$$
$$= x^2(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x^2 + 1\right).$$

Nhận xét: Có hai cơ sở để thêm bớt cùng một hạng tử :

- Thêm bớt để có thể dùng hằng đẳng thức.
- Thêm bớt các hạng tử bị khuyết trong đa thức để có thể đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

3. Phương pháp đổi biến

Ví dụ 35. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (x^2 - x - 3)(x^2 - x - 4) - 12$ b) $B = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

Giải

a) Ta đặt $x^2 - x - 3 = a$ thì $x^2 - x - 4 = a - 1$.

Khi đó $A = a(a - b) - 12 = a^2 - a - 12 = (a - 4)(a + 3)$.

Thay trở lại $a = x^2 - x - 3$ ta được $A = (x^2 - x - 3 - 4)(x^2 - x - 3 + 3)$

$= (x^2 - x - 7)(x^2 - x) = x(x - 1)(x^2 - x - 7)$.

b) Ta đặt $x - y = a;\ y - z = b;\ z - x = c$

thì $a + b + c = (x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$.

Ta được $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (xem ví dụ 10).

Do đó $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

Nhận xét: Trong ví dụ trên nếu ta khai triển đa thức, thu gọn rồi phân tích thì sẽ được một đa thức bậc cao khó phân tích. Phương pháp đổi biến như trên đưa một biểu thức phức tạp thành một biểu thức đơn giản dễ phân tích.

4. Phương pháp đồng nhất hệ số

Ví dụ 36. Phân tích đa thức A thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên
: