

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & (5a - 3b + 4c)(5a - 3b - 4c) = (3a - 5b)^2 \\ \Leftrightarrow & [(5a - 3b) + 4c][(5a - 3b) - 4c] = (3a - 5b)^2 \\ \Leftrightarrow & (5a - 3b)^2 - (4c)^2 = (3a - 5b)^2 \\ \Leftrightarrow & 25a^2 - 30ab + 9b^2 - 16c^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2 \\ \Leftrightarrow & 25a^2 - 9a^2 + 9b^2 - 25b^2 - 16c^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 16a^2 - 16b^2 - 16c^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 16a^2 = 16b^2 + 16c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Do đó tam giác có độ dài ba cạnh là  $a, b, c$  chính là một tam giác vuông.

**Ví dụ 8.** Cho  $x + y = -9$ ;  $xy = 18$ . Không tính các giá trị của  $x$  và  $y$ , hãy tính giá trị của các biểu thức sau :

a)  $M = x^2 + y^2$  ;      b)  $N = x^4 + y^4$  ;      c)  $P = x^2 - y^2$ .

**Giải.** Đề bài cho giá trị của tổng  $x + y$  và tích  $xy$  nên muốn tính được giá trị của các biểu thức  $M, N, P$  ta phải biểu diễn các biểu thức này dưới dạng các biểu thức có  $(x + y)$  và  $xy$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2xy \\ &= (-9)^2 - 2 \cdot 18 = 45. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } N &= x^4 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 \\ &= 45^2 - 2 \cdot 18^2 = 1377. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } (x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \\ &= (x + y)^2 - 4xy = (-9)^2 - 4 \cdot 18 = 9. \end{aligned}$$

Suy ra  $x - y = \pm 3$ .

• Nếu  $x - y = 3$  thì  $P = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 3 \cdot (-9) = -27$ .

• Nếu  $x - y = -3$  thì  $P = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = (-3) \cdot (-9) = 27$ .

**Ví dụ 9.** Tìm  $x, y, z$  biết:

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y + 34 = -(4z - 1)^2.$$

**Giải.**

Ta có  $x^2 - 6x + y^2 + 10y + 34 = -(4z - 1)^2$

Suy ra  $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = -(4z - 1)^2$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (4z - 1)^2 = 0$$

Ta thấy  $(x - 3)^2 \geq 0$ ;  $(y + 5)^2 \geq 0$ ;  $(4z - 1)^2 \geq 0$

Mà  $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (4z - 1)^2 = 0$ .

$$\text{nên } \begin{cases} (x - 3)^2 = 0 \\ (y + 5)^2 = 0 \\ (4z - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

**Nhận xét:** Ta gọi phương pháp giải trong ví dụ trên là phương pháp "Tổng các bình phương". Nội dung của phương pháp này dựa vào nhận xét:

$$A^2 \geq 0; B^2 \geq 0; C^2 \geq 0.$$

Nếu có  $A^2 + B^2 + C^2 = 0$  thì  $A^2 = B^2 = C^2 = 0$ .

**Ví dụ 10.** Cho  $a + b + c = 0$ , chứng minh rằng  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

**Giải.** Từ  $a + b + c = 0$ , suy ra  $a + b = -c$ .

Lập phương hai vế ta được  $(a + b)^3 = (-c)^3$ .

Suy ra  $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$

Thay  $a + b = -c$  vào đẳng thức trên ta được  $a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3$ .

Do đó  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

*Lưu ý.*

- Nên nhớ kết quả của ví dụ này để vận dụng giải nhiều bài toán khác.
- Trong quá trình giải ví dụ trên ta đã khai triển  $(a+b)^3$  thành  $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$  (1) tiện lợi hơn là khai triển thành  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  (2) vì trong khai triển (1) có sẵn  $(a + b)$  để thay bằng  $-c$  ra kết quả được nhanh chóng.

**Ví dụ 11.** Số  $a = 8^{3^{1000}} - 1$  là số nguyên tố hay hợp số ?

**Giải.** Ta có  $3^{1000} \div 3$  nên ta đặt  $3^{1000} = 3^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

$$\begin{aligned} \text{Do đó } a &= 8^{3^n} - 1 = (8^n)^3 - 1^3 \\ &= (8^n - 1)(8^{2n} + 8^n + 1). \end{aligned}$$

Số  $a$  là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên  $a$  là hợp số.

**Ví dụ 12.** Chứng minh đẳng thức