

**Giải**

- Từ điều kiện  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ , suy ra  $\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz} = 0$

$$\text{hay } ayz + bxz + cxy = 0.$$

- Từ điều kiện  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = k$  suy ra  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right) = k^2$

$$\text{hay } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{cxy+ayz+bzx}{abc} = k^2.$$

$$\text{Nhưng } cxy+ayz+bzx = 0 \text{ nên } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2.$$

**Ví dụ 12.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{10x^2-6x+2}{x^2+1}$ .

**Giải**

$$\text{Ta có } P = \frac{10x^2-6x+2}{x^2+1} = \frac{9x^2-6x+1+(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{(3x-1)^2}{x^2+1} + 1.$$

$$\text{Ta có } \frac{(3x-1)^2}{x^2+1} \geq 0 \text{ (dấu “=” xảy ra khi } x = \frac{1}{3}) \text{ nên } P \geq 1.$$

$$\text{Do đó } \min P = 1 \text{ khi } x = \frac{1}{3}.$$

## C. BÀI TẬP

**Cộng, trừ các phân thức không có điều kiện ràng buộc giữa các biến**

1. Làm các phép tính:

a)  $\frac{x}{xy-y^2} - \frac{y}{x^2-xy}$ ;

b)  $\frac{x-y}{2x+2y} + \frac{x^2+3y^2}{2y^2-2x^2}$ .

2. Tính bằng cách hợp lí:

$$a) \frac{x^2-xy}{x^2-2xy+y^2} + \frac{y^2+xy}{x^2+2xy+y^2} + \frac{2xy}{y^2-x^2};$$

$$b) \frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2} + \frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1^2} + \frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}.$$

3. Cho  $n \in \mathbb{Z}$ , chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị nguyên:

$$a) A = \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3};$$

$$b) B = \frac{n^4}{12} - \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6}.$$

4. Tính tổng:

$$P = \frac{1}{(y-z)(x^2+xz-y^2-yz)} + \frac{1}{(z-x)(y^2+xy-z^2-xz)} + \frac{1}{(x-y)(z^2+yz-x^2-xy)}.$$

5. Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để các biểu thức sau có giá trị nguyên:

$$a) A = \frac{2x^2-5x+3}{2x-5};$$

$$b) B = \frac{3x^3+9x^2-x-5}{x+3}.$$

**Cộng trừ các phân thức có điều kiện ràng buộc giữa các biến**

6. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{5a-b}{3a+7} + \frac{3b-2a}{2b-7} \text{ với } a \neq \frac{7}{3}; b \neq \frac{7}{2}; \text{ và } 2a - b = 7.$$

$$b) B = \frac{8a+5b}{5a-1} + \frac{3a+b}{4b+1} \text{ với } a \neq \frac{1}{5}; b \neq \frac{1}{4}; \text{ và } 3a + 5b = -1.$$

7. Tính tổng:

$$a) P = \frac{x}{-xy+x+1} - \frac{y}{yz-y+1} + \frac{z}{xz+z-1}$$

với  $xyz = 1$  và các mẫu thức đều khác 0.

$$b) Q = \frac{x}{xy+x+2} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{2z}{xz+2z+2}$$

với  $xyz = 2$  và các mẫu thức đều khác 0.

8. Cho  $x, y, z$  đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn điều kiện :

$$xy + yz + zx = 0.$$

Tìm giá trị của tổng  $A = \frac{x^2}{x^2+2yz} + \frac{y^2}{y^2+2zx} + \frac{z^2}{z^2+3xy}$

9. Cho  $x, y, z$  khác  $\pm 1$  và  $xy + yz + zx = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

10. Cho  $xyz \neq 0$  và  $x + y + z = 0$ . Tính:

$$A = \frac{x^2}{y^2+z^2-x^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2-y^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}.$$