

$$\begin{aligned} * \text{ Ta có } x^7 + x^2 + 1 &= x^7 - x + x^2 + x + 1 = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 + 1)(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^4 + x)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Ta có } Q = x^8 + x + 1 &= x^8 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2(x^3 + 1)(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^5 + x^2)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

Tử và mẫu có nhân tử chung là đa thức $x^2 + x + 1$ khác đa thức ± 1 do đó phân thức Q chưa tối giản.

Ví dụ 6. Cho $a > b > 0$ và $a^2 + 3b^2 = 4ab$. Tính giá trị của phân thức $A = \frac{a+11b}{2a+b}$.

Giải. Từ điều kiện $a^2 + 3b^2 = 4ab$ suy ra $a^2 + 3b^2 - 4ab = 0$ hay $(a - b)(a - 3b) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b & (\text{loại}) \\ a = 3b. \end{cases}$$

Thay $a = 3b$ vào phân thức A ta được

$$A = \frac{a+11b}{2a+b} = \frac{3b+11b}{6b+b} = \frac{14b}{7b} = 2.$$

C. BÀI TẬP

• Hai phân thức bằng nhau. Tính chất cơ bản

1. Tìm đa thức M trong các trường hợp sau :

a) $\frac{x^3+27}{x^2-3x+9} = \frac{x+3}{M}$;

b) $\frac{M}{x+4} = \frac{x^2-8x+16}{16-x^2}$;

c) $\frac{x-2y}{M} = \frac{3x^2-7xy+2y^2}{3x^2+5xy-2y^2}$.

2. Hai phân thức sau có bằng nhau không ? Vì sao ?

3. Cho $ad = bc$ trong đó $cd \neq 0$ và $c^2 \neq 2d^2$. Chứng minh rằng $\frac{a^2-2b^2}{c^2-2d^2} = \frac{ab}{cd}$.

4. Viết các đa thức sau dưới dạng một phân thức đại số với tử và mẫu là những đa thức có hai hạng tử :

a) $A = x^{35} + x^{34} + x^{33} + \dots + x + 1$;

b) $B = (x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \dots (x^{64} + 1)$.

• Rút gọn phân thức

5. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\frac{2x-6}{x^2-x-6}$;

b) $\frac{6x^2-x-2}{4x^2-1}$.

6. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^3+2x^2+3x+6} = \frac{x-1}{x+2}$;

b) $\frac{x^3-25x}{x^4+125x} = \frac{x-5}{x^2-5x+25}$.

7. Cho phân thức $B = \frac{xy^2+y^2(y^2-x)+2}{x^2y^4+y^4+2x^2+2}$

a) Chứng minh rằng $B > 0$ với mọi x, y ;

b) Tìm các giá trị của biến để B đạt giá trị lớn nhất.

8. Tính giá trị của phân thức :

a) $A = \frac{x^2 - 25y^2}{3x + 15y}$ với $x \neq -5y$ và $x - 5y = 99$;

b) $B = \frac{3x - 9y}{2x^2 - 18y^2}$ với $x \neq \pm 3y$ và $x + 3y = \frac{1}{4}$.

9. Rút gọn các phân thức :

a) $\frac{a^{2n} - b^{2n}}{(a-b)(a^n + b^n)}$;

b) $\frac{x^{3n} - y^{3n}}{x^n - y^n}$;

c) $\frac{x^{4m} - y^{4n}}{x^{3m} + x^{2m}y^n + x^m y^{2n} + y^{3n}}$.

10. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì các phân số sau đều tối giản:

a) $\frac{4n+1}{5n+1}$;

b) $\frac{12n+1}{30n+1}$.