

**B. KỸ NĂNG CƠ BẢN**

**1. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực**

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích  $f(x)g(x)$

Nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$  (hoặc  $-\infty$ ) thì  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  được tính theo quy

tắc cho trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương  $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
$L$	$\pm\infty$	Tùy ý	$0$
$L > 0$	$0$	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của  $g(x)$  xét trên một khoảng  $K$  nào đó đang tính giới hạn, với  $x \neq x_0$ )

**CHÚ Ý**

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp  $x \rightarrow x_0^+$ ,  $x \rightarrow x_0^-$ ,  $x \rightarrow +\infty$  và  $x \rightarrow -\infty$ .

**Ví dụ 1.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)$ .

**Giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = -\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = 1 > 0.$$

**Ví dụ 2.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$ .

**Giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2 > 0.$$

**Ví dụ 3.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$ .

**Giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0, x - 1 > 0 \text{ với mọi } x > 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = -1 < 0.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty.$$

**Ví dụ 4.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1}$ .

**Giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0, x - 1 < 0 \text{ với mọi } x < 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 3) = -1 < 0.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1} = +\infty.$$

## 2. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giới hạn

Ý tưởng giả sử cần tính  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của  $f(x)$  tại các giá trị của  $x$  rất gần  $a$ .

- a) Giới hạn của hàm số tại một điểm  
+  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = a + 10^{-9}$ .

+  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = a - 10^{-9}$ .

+  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = a + 10^{-9}$  hoặc  $x = a - 10^{-9}$ .

b) Giới hạn của hàm số tại vô cực

+  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = 10^{10}$ .

+  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = -10^{10}$ .

**Ví dụ 1.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ .

**Giải.**

Nhập biểu thức  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ .

Ấn  $\rightarrow$  máy hỏi X? ấn  $1 + 10^9 =$  máy hiện 4.

Nên  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4$ .

**Ví dụ 2.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$ .

Nhập biểu thức  $\frac{2x - 3}{x - 1}$ .

Ấn  $\rightarrow$  máy hỏi X? ấn  $1 + 10^9 =$  máy hiện -99999998.

Nên  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty$ .

**Ví dụ 3.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1}$ .

Nhập biểu thức  $\frac{2x - 3}{x - 1}$ .

Ấn  $\rightarrow$  máy hỏi X? ấn  $1 - 10^9 =$  máy hiện 99999998.

Nên  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1} = +\infty$ .

**Ví dụ 4.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ .

**Giải.**

Nhập biểu thức  $\frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ .

Ấn  $\pi$  máy hỏi X? ấn  $10^{10}$  = máy hiện 2.

Nên  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = 2$ .

**Ví dụ 5.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x}{x + 1}$ .

**Giải.**

Nhập biểu thức  $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 3x}{x + 1}$ .

Ấn  $\pi$  máy hỏi X? ấn  $10^{10}$  = máy hiện 3.

Nên  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = 2$ .

**Ví dụ 6.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x + 1}{x + 1}$ .

**Giải.**

Nhập biểu thức  $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x + 1}{x + 1}$ .

Ấn  $\pi$  máy hỏi X? ấn  $10^{10}$  = máy hiện 1.

Nên  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x + 1}{x + 1} = 1$ .

**Ví dụ 7.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số  $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$ .

**Giải.**

Nhập biểu thức  $\frac{2x - 1}{x + 2}$ .

Ấn  $\pi$  máy hỏi X? ấn  $10^{10}$  = máy hiện 2.

Ấn  $\pi$  máy hỏi X? ấn  $10^{10}$  = máy hiện 2.

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2.$$

Do đó đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của  $(C)$ .

**Ví dụ 7.** Tìm tiệm cận đứng của đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$ .

**Giải.**

Nhập biểu thức  $\frac{x+1}{x-2}$ .

Ấn  $\times$  máy hỏi X? ấn  $2+10^{\wedge}p9=$  máy hiện 300000001.

Ấn  $\times$  máy hỏi X? ấn  $2p10^{\wedge}p9=$  máy hiện -299999999.

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x+2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x+2} = -\infty.$$

Do đó đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của  $(C)$ .