

$$4). \sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{4}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sin t - \cos t$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 t - \sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t(\sin^2 t - 1) + \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 t \cdot \sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t(1 - \sin t \cdot \cos t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \vee 1 - \sin t \cdot \cos t = 0$$

$$\text{Với: } \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Với } 1 - \sin t \cdot \cos t = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2t = 1 \Leftrightarrow \sin 2t = 2 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$5). \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \quad (*)$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Có: } \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

$$(*) \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x}{4} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} : (\text{thỏa đk}).$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

$$6). \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin 3x = \sin x + \sin 2x \quad (*)$$

Điều kiện: $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0, \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$. Ta có:

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right]\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

$$(*) \Leftrightarrow -\sin 3x = \sin x + \sin 2x \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \vee \cos x = -0,5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \text{ hoặc } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

$$7). \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (*)$$

$$\text{Nhận thấy: } \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right] = -\sin 3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$, suy ra: $x = t - \frac{\pi}{4}$ nên phương trình đã cho:

$$(*) \Leftrightarrow -\sin 3t = \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin t \Leftrightarrow 4\sin^3 t - 3\sin t + \cos 2t \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 t - 3\sin t + (1 - 2\sin^2 t)\sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ hoặc } \sin^2 t = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ hoặc } \cos t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \text{ hoặc } t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Suy ra: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

$$8). 8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x \quad (*)$$

$$\text{Nhận thấy: } \cos 3x = -\cos(\pi + 3x) = -\cos\left[3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]. \text{ Đặt } t = x + \frac{\pi}{3}.$$

$$(*) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = -\cos 3t = -4\cos^3 t + 3\cos t \Leftrightarrow 12\cos^3 t - 3\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ hoặc } 4\cos^2 t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ hoặc } \cos 2t = -\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $t = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Suy ra: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k\pi$.

hoc360.net