

$$5). \sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1: (1) \Leftrightarrow 1 = 0$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ được:

$$\sqrt{3} \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - 1 + (1 - \sqrt{3})(1 + \tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm của phương trình đã cho: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$6). 9 \sin^2 x - 30 \sin x \cos x + 25 \cos^2 x = 25 \quad (1)$$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1: (1) \Leftrightarrow 9 = 25$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ được:

$$9 \tan^2 x - 30 \tan x + 25 = 25(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow 16 \tan^2 x + 30 \tan x = 0$$

$$\begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = -\frac{15}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{15}{8}\right) + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Phương trình đã cho có các nghiệm: $x = k\pi, x = \arctan\left(-\frac{15}{8}\right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$7). \sin 2x - 2 \sin^2 x = 2 \cos 2x \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x - \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$8). \sin^2 x + \sin 2x - 2 \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad (1')$$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1: (1') \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của (1') cho $\cos^2 x$ được:

$$\tan^2 x + 2 \tan x - 2 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^2 x + 4 \tan x - 5 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \vee \tan x = -5$$

Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Với $\tan x = -5 \Leftrightarrow x = \arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$