3). $\left(2\tan^2 x-1\right)\cos x=2-\cos 2x\left(*\right)$

Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left[2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)-1\right]\cos x=2-\left(2\cos^2 x-1\right)\left(**\right)$

Đặt $t=\cos x$. Điều kiện: $t\in\left[-1,1\right]/\left\{0\right\}$.

$\left(**\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2}{t^2}-3\right)t=3-2t^2\ \Leftrightarrow\frac{2}{t}-3t+2t^2-3=0\ \Leftrightarrow 2t^3-3t^2-3t+2=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ (nhận) $\vee t=\frac{1}{2}$ (nhận) $\vee t=2$ (loại).

Với $t=-1\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

Với $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình $x=\pi+k2\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

4). $5\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-3(1-\cos x)\cot^2 x=2\quad(1)$

Điều kiện $\sin x\neq 0$

Ta có : $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$(1)\ \Leftrightarrow\ 5\cos x-3(1-\cos x).\frac{\cos^2 x}{\sin x}=2$

$\Leftrightarrow\ 5\cos x-3(1-\cos x)\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=2$

$\Leftrightarrow\ 5\cos x-3(1-\cos x)\frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=2$

$\Leftrightarrow\ 5\cos x(1+\cos x)-3\cos^2 x=2(1+\cos x)$

$\Leftrightarrow\ 2\cos^2 x+3\cos x-2=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}$ hoặc $\cos x=-2$ (loại)

$\Leftrightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ (k\in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình : $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in ¢)$

5). $(\tan x - 1)\sin^2 x + 3\cos^2 x - \frac{3}{2}\sin 2x = 0$ (1)

Điều kiện $\cos x \neq 0$

(1) $\Leftrightarrow (\tan x - 1)\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sin x.\cos x = 0$

Chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được : $(\tan x - 1)\tan^2 x + 3 - 3\tan x = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3}$ hoặc $\tan x = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

6). $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right]$ $(*)$

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, (k \in Z)$

$(*) \Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x)\sin^2 x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\sin x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)(1 - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in Z)$$

Cả hai họ nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện , vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z)$.