1.31: Giải các phương trình:

1). $\cos 2x - \cos x = 2\sin^2 \frac{3x}{2}$

2). $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$

3). $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

4). $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$

5). $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$

LỜI GIẢI

1). $\cos 2x - \cos x = 2\sin^2 \frac{3x}{2} \Leftrightarrow \cos 2x - \cos x = 2.\frac{1 - \cos 3x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \cos x = 1 - \cos 3x$ $\qquad \Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) + (\cos 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x - (1 - \cos 2x) = 0$ $\qquad \Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x - 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin x(\sin 2x + \sin x) = 0$ $\qquad \Leftrightarrow -2\sin x(2\sin x \cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x(2\cos x + 1) = 0$ $\qquad \Leftrightarrow \sin x = 0 \ \vee \ 2\cos x + 1 = 0$

Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in ¢)$

Với $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in ¢)$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = k\pi$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in ¢)$.

2). $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} \qquad (1)$

Điều kiện: $1 - \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in ¢)$

$(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) = \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \ \vee \ \cos x - \sin x - 1 = 0$

Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Với $\cos x-\sin x-1=0\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \quad \left(k\in \text{¢}\right)$$

So với điều kiện nghiệm phương trình: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=k2\pi, x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, \left(k\in \text{¢}\right)$

3). $\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x} \quad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x\ne 0 \\ 1-\cos 2x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\ne 0 \\ \cos 2x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ 2x\ne k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x\ne k\pi \end{cases} \quad \left(k\in \text{¢}\right)$

Sử dụng công thức nhân đôi $\sin 2x=2\sin x\cos x,\ 1-\cos 2x=2\sin^2 x,\ 1+\cos 2x=2\cos^2 x$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}\Leftrightarrow 2\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}\Leftrightarrow 2\cos x\sin x=\cos x \ \ (\text{vì } \cos x\ne 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x=1\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \ \vee \ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \quad (k\in z)$$

4). $\sin^2 4x+\sin^2 3x=\sin^2 2x+\sin^2 x \quad (1)$

Ý tưởng: Có bình phương ta hạ bậc, sau đó biến đổi tổng thành tích, và đặt nhân tử chung...

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1-\cos 8x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x+\cos 6x=\cos 4x+\cos 2x\Leftrightarrow 2\cos 7x.\cos x=2\cos 3x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos 7x-\cos 3x\right)=0\Leftrightarrow \cos x=0 \ \vee \ \cos 7x-\cos 3x=0$$

Với $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad \left(k\in \text{¢}\right)$

Với $\cos 7x-\cos 3x=0\Leftrightarrow \cos 7x=\cos 3x\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\dfrac{k\pi}{5}, \left(k\in \text{¢}\right)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\dfrac{k\pi}{2},\ x=\dfrac{k\pi}{5}, \left(k\in \text{¢}\right)$

5). $\sin^2 x+\sin^2 3x=\cos^2 2x+\cos^2 4x \ (1)$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}$$

$\Leftrightarrow -(\cos 6x + \cos 2x) = (\cos 8x + \cos 4x) \Leftrightarrow -2\cos 4x.\cos 2x = 2\cos 6x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 6x + \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos 2x.\cos 5x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hoặc $\cos 5x = 0$ hoặc $\cos x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in ¢)$

1.33: Giải các phương trình:

1). $(1+\sin^2 x).\cos x + (1+\cos^2 x).\sin x = 1 + \sin 2x$

2). $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x.\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x$

3). $(\sin 2x + \cos 2x).\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

4). $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

LỜI GIẢI

1). $(1+\sin^2 x).\cos x + (1+\cos^2 x).\sin x = 1 + \sin 2x \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \cos x + \sin^2 x.\cos x + \sin x + \cos^2 x.\sin x = 1 + \sin 2x$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + \sin x.\cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)[1 + \sin x.\cos x - (\sin x + \cos x)] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)[(1 - \sin x) - \cos x(1 - \sin x)] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - \sin x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in ¢) \\ x = k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi, (k \in ¢)$

2). $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x.\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \sin^3 x - \sin x.\cos^2 x - \sqrt{3}\cos^3 x + \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) - \sqrt{3}\cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow -\sin x.\cos 2x - \sqrt{3}\cos x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -\cos 2x\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \;\vee\; \sin x + \sqrt{3}\cos x = 0.$

Với: $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Với: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos x.\sin\frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \;\left(k \in ¢\right)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \;\left(k \in ¢\right)$

3). $\left(\sin 2x + \cos 2x\right).\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0 \;(1)$

$(1) \Leftrightarrow \sin 2x.\cos x + \cos 2x.\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x.\cos^2 x - \sin x\right) + \cos 2x\left(\cos x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x - 1\right) + \cos 2x\left(\cos x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x + \cos 2x\left(\cos x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x + \cos x + 2\right) = 0 \;\; \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \;\vee\; \sin x + \cos x + 2 = 0$

Với: $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \;\left(k \in ¢\right)$

Với: $\sin x + \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ (vô nghiệm).

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \;\left(k \in ¢\right)$

4). $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0 \;(1)$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x\cos x - \cos x\right) + \left(2\sin^2 x + 3\sin x - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\cos x+\sin x+2)=0$

Với $\sin x+\cos x+2=0$ (vô nghiệm)

Với: $2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi (k\in ¢)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, (k\in ¢)$.

1.32: Giải các phương trình:

1). $\tan x+\tan 2x=\sin 3x.\cos x$ 2). $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin 3x+\cos 4x$

3). $2\sin^3 x+\cos 2x=\sin x$ 4). $\sin x.\sin 2x.\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$

LỜI GIẢI

1). $\tan x+\tan 2x=\sin 3x.\cos x \quad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{cases} \quad (k\in ¢)$

$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\sin 3x.\cos x$, quy đồng mẫu hai vế ta được:

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x+\sin 2x.\cos x=\sin 3x.\cos^2 x.\cos 2x$

Vì $\sin x.\cos 2x+\sin 2x.\cos x=\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin 3x=\sin 3x.\cos^2 x.\cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x(\cos^2 x.\cos 2x-1)=0$

$\Leftrightarrow \sin 3x=0 \quad \vee \quad \cos^2 x.\cos 2x-1=0$

Với $\sin 3x=0 \Leftrightarrow 3x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3} \quad (k\in ¢)$

Với $\cos^2 x.\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2}.\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos^2 2x+\cos 2x-2=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=1 \vee \cos 2x=-2$ (loại) $\Leftrightarrow 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi \ (k\in ¢)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\frac{k\pi}{3},\ x=k\pi \ (k\in ¢)$

2). $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \cos 2x = \sin 3x + \cos 4x \Leftrightarrow \quad \sin 3x + (\cos 4x - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x - 2\sin 3x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \quad \sin 3x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \quad \vee \quad 1 - 2\sin x = 0$

Với: $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3} \quad (k \in \text{¢})$

Với: $1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \text{¢})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{k\pi}{3}, \; x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \text{¢})$

3). $2\sin^3 x + \cos 2x = \sin x \; (1)$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin^3 x - \sin x + \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \sin x(2\sin^2 x - 1) + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -\cos 2x.\sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(-\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \;\; \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \;\; x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \text{¢})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \; x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \text{¢})$

4). $\sin x.\sin 2x.\sin 3x = \dfrac{1}{4}\sin 4x \; (1)$

$(1) \Leftrightarrow \sin x.\sin 2x.\sin 3x = \dfrac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x).\sin 2x = \dfrac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$ hoặc $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, (k \in \text{¢})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{k\pi}{2}, x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, (k \in \text{¢})$