4). $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x\ (1)$

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=t-\frac{\pi}{4}$

$(1)\Leftrightarrow \sin^3 t=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \sin^3 t=\sin t-\cos t$

$\Leftrightarrow \sin^3 t-\sin t-\cos t=0\Leftrightarrow \sin t\left(\sin^2 t-1\right)+\cos t=0$

$\Leftrightarrow -\cos^2 t.\sin t+\cos t=0\Leftrightarrow \cos t\left(1-\sin t.\cos t\right)=0\Leftrightarrow \cos t=0\ \vee 1-\sin t.\cos t=0$

Với: $\cos t=0\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in ¢)$

Với $1-\sin t.\cos t=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2t=1\Leftrightarrow \sin 2t=2$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in ¢)$

5). $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\qquad (*)$

ĐK: $\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\neq 0\end{cases}\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\neq 0\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\cdot$

Có: $\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1.$

$(*)\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}\Leftrightarrow \frac{3+\cos 4x}{4}=\frac{7}{8}\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$: (thỏa đk).

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$ với $k\in ¢$.

6). $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x\qquad (*)$

Điều kiện: $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0,\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, với $k\in ¢$. Ta có:

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right]\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1.$$

$(*)\Leftrightarrow -\sin 3x=\sin x+\sin 2x\Leftrightarrow(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=0\Leftrightarrow \sin 2x=0\ \vee\ \cos x=-0{,}5$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ với $k\in$ ¢ (thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{k\pi}{2},\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi.$

7). $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(*)$

Nhận thấy: $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)=-\sin\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\right]=-\sin 3\cdot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$

Đặt $t=x+\dfrac{\pi}{4}$, suy ra: $x=t-\dfrac{\pi}{4}$ nên phương trình đã cho:

$(*)\Leftrightarrow -\sin 3t=\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\sin t\Leftrightarrow 4\sin^3 t-3\sin t+\cos 2t\sin t=0$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 t-3\sin t+(1-2\sin^2 t)\sin t=0\Leftrightarrow \sin t=0$ hoặc $\sin^2 t=1$

$\Leftrightarrow \sin t=0$ hoặc $\cos t=0\Leftrightarrow t=k\pi$ hoặc $t=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ với $k\in$ ¢.

Suy ra: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ với $k\in$ ¢.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, với $k\in$ ¢.

8). $8\cos^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$ $(*)$

Nhận thấy: $\cos 3x=-\cos(\pi+3x)=-\cos\left[3\cdot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\cdot$ Đặt $t=x+\dfrac{\pi}{3}\cdot$

$(*)\Leftrightarrow 8\cos^3 t=-\cos 3t=-4\cos^3 t+3\cos t\Leftrightarrow 12\cos^3 t-3\cos t=0$

$\Leftrightarrow \cos t=0$ hoặc $4\cos^2 t-1=0\Leftrightarrow \cos t=0$ hoặc $\cos 2t=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $t = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Suy ra: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $x = k\pi$ với $k \in$ ¢.

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = k\pi.$

9). $\sqrt{2}\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin x$ $\quad (*)$. Đặt $t = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{4}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sin t - \cos t = (\sin t - \cos t)(\sin^2 t + \cos^2 t)$

$\Leftrightarrow \cos t(-\sin^2 t + \sin t\cos t - \cos^2 t) = 0 \Leftrightarrow \cos t(\sin 2t - 2) \Leftrightarrow \cos t = 0 \ \vee\ \sin 2t = 2$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Suy ra: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in$ ¢.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in$ ¢.