Ví dụ 6: Trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$, hệ số số hạng thứ ba lớn hơn hệ số số hạng thứ hai là 35. Tính số hạng không chứa x.

LỜI GIẢI

Ta có $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{n-2k}$

Từ giả thiết suy ra $C_n^2 - C_n^1 = 35 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -7 (\text{loai}). \end{array}\right.$

Vậy $n = 10$: Số hạng $a_{k+1} = C_{10}^k.x^{10-2k}$ không phụ thuộc x khi $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy số hạng ấy là $C_{10}^5 = 252$.

Ví dụ 7: Khai triển và rút gọn đa thức

$P(x) = (1+x)^6 + (1+x)^7 + (1+x)^8 + ... + (1+x)^{10}$

Được $P(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + ... + a_0$. Tính a_8.

LỜI GIẢI

a_8 là hệ số của số hạng chứa x^8. Ta có

- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^8$ là C_8^8.
- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^9$ là C_9^8.
- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^{10}$ là C_{10}^8.

Vậy $a_8 = C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 = 55$.

DẠNG 2: TÍNH TỔNG hoặc CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

PHƯƠNG PHÁP

Dựa vào các công thức khai triển nhị thức Niutơn sau:

- $(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$
- $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$
- $(x+1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1}x + C_n^n$.

Sau đó chọn a, b, x các giá trị thích hợp $\Rightarrow$ …

Ví dụ 1: Tính các giá trị của biểu thức sau:

$S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$

$S_2 = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n$

$S_3 = 2^nC_n^0 + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + \cdots + C_n^n$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \cdots + C_n^nx^n \quad (*)$

a). Chọn x = 1 thay vào (*) ta được: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$

Kết luận: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

b). Chọn x = 2 thay vào (*) ta được: $(1+2)^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n$

Kết luận $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n = 3^n$

c). Ta có $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \cdots + C_n^n \quad (**)$

Chọn x = 2 thay vào (**) ta được: $(2+1)^n = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + \cdots + C_n^n$

Kết luận $2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + \cdots + C_n^n = 3^n$

Những kết quả này áp dụng rất nhiều cho các bài tập ở sau.

Ví dụ 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a). $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$

b). $C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0$

c). $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (*)$

a). Chọn x = 1 thay vào (*) ta được:

$(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Kết luận: $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$ (1).

b). Chọn x = -1 thay vào (*) ta được:

$(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Kết luận: $C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0$ (2).

c). Từ (2) ta suy ra: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}$ (3)

lấy (1) + (2) vế theo vế ta được:

$$2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}\right) = 2^{2n} \Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1} \qquad (4)$$

Từ (3) và (3) suy ra $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$

Những kết quả này áp dụng rất nhiều cho các bài tập ở sau

BÀI TẬP TỔNG HỢP

DẠNG 1: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC DỰA VÀO CÔNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT CỦA TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP

Nhắc lại: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$

Câu 1: Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a). $C_n^k = C_n^{n-k}$ b). $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

c). $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$.

LỜI GIẢI

a). Ta có: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-(n-k)!)(n-k)!} = C_n^{n-k}$.

b). Ta có:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

c). Áp dụng kết quả bài 2 ta có:

$$VT = \left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 2\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + \left(C_n^{k+2} + C_n^{k+3}\right)$$

$$= C_{n+1}^{k+1} + 2C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3} = \left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + \left(C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}\right)$$

$$= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+3}^{k+3} = VP$$

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 2: Chứng minh với các số k, n nguyên, không âm sao cho $1 \le k \le n$, ta có $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

LỜI GIẢI

$$kC_n^k = k.\frac{n!}{k!(n-k)!} = k.\frac{n.(n-1)!}{k.(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!}$$

$$= n.\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 3: Chứng minh với các số k, n nguyên, không âm sao cho $2 \le k \le n$, ta có $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

LỜI GIẢI

Ta có: $k(k-1)C_n^k = k(k-1)\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!\left[(n-2)-(k-2)\right]!} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 4: Chứng minh với các số k, n nguyên, không âm sao cho $2 \le k \le n$, ta có $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$

LỜI GIẢI

Ta có: $k^2C_n^k = k(k-1+1)C_n^k = k(k-1)C_n^k + kC_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$ (áp dụng kết quả của hai bài kế trên).

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 5: Chứng minh với các số k, n nguyên,không âm sao cho $0 \le k \le n,$ ta có $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$

LỜI GIẢI

Ta có: $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}$

$$= \frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 6: Chứng minh với các số k, n nguyên,không âm sao cho $0 \le k \le n,$ ta có $nC_n^k = (k+1)C_n^{k+1} + kC_n^k.$

LỜI GIẢI

$$nC_n^k = n.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \left[(n-k)+k\right].\frac{n!}{k!(n-k)!} = (n-k).\frac{n!}{k!(n-k)!} + k.\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$(n-k)(k+1)\frac{n!}{(k+1)!.(n-k)(n-k-1)!} + r.\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= (k+1).\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + r.\frac{n!}{r!(n-r)!} = (r+1)C_n^{r+1} + rC_n^r.$$

Câu 7: Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a). $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$ với $n \in N^*, 0 \le k \le n-3.$

b). $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2.A_{n+k}^n$ với $n, k \in N^*, k \ge 2.$

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

Áp dụng kết quả trên ta có:

$$VT = \left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 2\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + \left(C_n^{k+2} + C_n^{k+3}\right)$$

$$= C_{n+1}^{k+1} + 2C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3} = \left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + \left(C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}\right)$$

$$= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+3}^{k+3} = VP$$

b). Ta có: $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!} + \frac{(n+k)!}{(k-1)!} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!}\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)$

$$=\frac{(n+k)!}{(k-2)!}.\frac{k}{k-1}=k^2.\frac{(n+k)!}{k!}=k^2.A_{n+k}^{n}.$$