CÁCH KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$ (Dạng này thường gặp khi $x \to x_0$).

DẠNG 1: Hàm số $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là đa thức theo biến x.

PHƯƠNG PHÁP: Phân tích đa thức thành nhân tử, sau đó rút gọn biểu thức làm cả tử và mẫu bằng 0.
Phân tích đa thức thành nhân tử có các phương pháp sau:

- Sử dụng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Nếu tam thức bậc hai thì sử dụng $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), (a \neq 0)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$.
- Sử dụng phương pháp Hoocner . Phép chia đa thức $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ cho $(x-x_0)$ theo sơ đồ Hoocner như sau:

	a	b	c	d	e
x_0	a	$b_1=ax_0+b$	$c_1=ax_0^2+bx_0+c$	$d_1=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$	0

Hàng thứ nhất điền hệ số của đa thức $P(x)$ từ ô thứ hai đến ô cuối cùng. Ở hàng thứ hai ô đầu tiên điền giá trị x_0 là một nghiệm của $P(x)$, ô thứ hai viết lại a, lấy $(x_0.a+b)$ đặt vào ô thứ ba, lấy $x_0(x_0a+b)+c=ax_0^2+bx_0+c$ điền váo ô thứ tư, lấy $x_0\left(ax_0^2+bx_0+c\right)+d=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$ điền vào ô thứ năm, lấy $x_0\left(ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d\right)+e=0$ (bắt buộc tổng này phải bằng 0, thì đây mới là phép chia hết).
Khi đó $P(x)$ được viết lại

$$P(x)=(x-x_0)\left(ax^3+b_1x^2+c_1x+d_1\right)$$

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2+11x+18}$ b). $L=\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ c). $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^3+x^2-x-1}$

d). $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$ e). $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^3}{x^4-4x^2+3}$ f). $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}\right)$

LỜI GIẢI

a).Ta có $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)\left(x^2+2x+4\right)$ (áp dụng hằng đẳng thức), và $x^2+11x+18=(x+2)(x+9)$ (với $x_1=-2$ và $x_2=-9$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+11x+18=0$).

Do đó $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2+11x+18}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{(x+2)(x+9)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-2x+4}{x+9}=\frac{12}{7}$.

b). $L=\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

Thay $x=3$ vào cả tử và mẫu thấy đều bằng 0, nên $x=3$ là một nghiệm của hai đa thức cả mẫu và tử. Có nghĩa $(x-3)$ là nhân tử chung, ta phân tích đa thức ở tử và mẫu thành nhân tử bằng phương pháp Hoocner. Cách làm như sau:
Phân tích tử số: $2x^3-5x^2-2x-3=(x-3)\left(2x^2+x+1\right)$

Kẻ bảng như sau. Sau đó điền hệ số của từng số hạng với số mũ giảm dần vào các ô ở hàng đầu tiên với ô thứ nhất để trống. Ở hàng thứ hai: điền giá trị làm đa thức bằng 0 ở đây là chữ số 3. Ô thứ hai điền lại giá trị ở ô thứ hai của hàng một xuống (ta thường hay nói "đầu rơi xuống"), sau đó lấy $3.2+(-5)=1$ điền chữ số 1 vào ô thứ ba, lấy $3.1+(-2)=1$ điền chữ số 1 vào ô thứ tư, cuối cùng lấy $3.1+(-3)=0$ điền vào ô cuối cùng.

	2	-5	-2	-3
3	2	1	1	0

Phân tích mẫu số: $4x^3-13x^2+4x-3=(x-3)(4x^2-x+1)$

	4	-13	4	-3
3	4	-1	1	0

Do đó $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(2x^2+x+1)}{(x-3)(4x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1}=\dfrac{11}{17}$.

c). $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^3+x^2-x-1}$. Ta thấy $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3+5x^2+4x+1)=0$ và $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+x^2-x-1)=0$ như vậy đây là dạng giới hạn vô định $\dfrac{0}{0}$ ta phải phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử để khử vô định. Phân tích nhân tử bằng phương pháp Hoocner

Phân tích tử số: $2x^3+5x^2+4x+1=(x+1)(2x^2+3x+1)$

	2	5	4	1
-1	2	3	1	0

Phân tích mẫu số: $x^3+x^2-x-1=(x+1)(x^2+0x-1)=(x+1)(x^2-1)$

	1	1	-1	-1
-1	1	0	-1	0

Từ đó $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(2x^2+3x+1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$, ta thấy $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+3x+1)=0$ và $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-1)=0$ ta vẫn còn dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên phân tích thành nhân tử tiếp, ta làm như sau:

$$L=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

d). Bước đầu tiên ta phải quy đồng mẫu, sau đó phân tích đa thức của tử thành nhân tử và rút gọn hạng tử vô định $L=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}.$$

e). $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{x^4-4x^2+3}$. Phân tích tử số $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$. Phân tích mẫu số x^4-4x^2+3 $=x^4+0x^3-4x^2+0x^2+3$ bằng Hoocner:

	1	0	-4	0	3

1	1	1	–3	–3	0

Do đó $x^4-4x^2+3=(x-1)(x^3+x^2-3x-3)$

Từ đó $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{(x-1)(x^3+x^2-3x-3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(1+x+x^2)}{x^3+x^2-3x-3}=\dfrac{3}{4}$.

f). $L=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}\right]=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2}{(x-1)(x-3)}=-2$.

DẠNG 2: Hàm số $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x),Q(x)$ là các biểu thức có chứa căn thức theo biến x.

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Nhân lượng liên hợp.

- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)\to\left[\begin{array}{l}a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\\ a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\end{array}\right.$
- $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ • $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}-b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$
- $a-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $a+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a+b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$