Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=2$?

LỜI GIẢI

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1.$

Hàm liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=1.$

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x=2$ khi $a=1.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2} & \text{khi } x<2\\ a+\dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Xác định a để hàm số f(x) liên tục tại $x_0=2$.

LỜI GIẢI

Ta có :

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\left|(x-2)(2x-3)\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(2-x)(2x-3)}{x-2}$
  $=\lim\limits_{x\to 2^-}(3-2x)=-1$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(a+\dfrac{1-x}{2+x}\right)=a-\dfrac{1}{4}=f(2)$.

Hàm số liên tục tại $x_0=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a-\dfrac{1}{4}=-1\Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 6: Cho các hàm số $f(x)$ sau đây . Có thể định nghĩa $f(0)$ để hàm số $f(x)$ trở thành liên tục tại $x=0$ được không?

a) $f(x)=\dfrac{7x^2-5x}{12x}$ với $x\neq 0$

b) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x\neq 0$

c) $f(x)=\dfrac{3}{2x}$ với $x\neq 0$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{3x}$ với $x\neq 0$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(7x-5)}{12x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x-5}{12}=-\dfrac{5}{12}.$

Hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Vậy nếu bổ sung $f(0)=-\dfrac{5}{12}$ thì hàm số trở thành liên tục tại $x=0.$

b). Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4}=\lim\limits_{x\to 0}3\left(\sqrt{x+4}+2\right)=12.$

Hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0).$

Vậy nếu bổ sung $f(0)=12$ thì hàm số trở nên liên tục tại $x=0.$

c). Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{2x} = +\infty.$

hàm số không có giới hạn tại $x = 0$, do đó hàm không thể liên tục tại $x = 0$.

d). Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2-2+x}{3x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{3\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} = \dfrac{2}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}.$

Hàm số liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0).$

Vậy nếu bổ sung $f(0) = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ thì hàm số trở nên liên tục tại $x = 0.$

DẠNG 2: HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT TẬP HỢP

Ví dụ 1: Chứng minh các hàm số sau liên tục trên R.

a). $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ b). $f(x) = x^2.\sin x - 2\cos^2 x + 3$

c). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x \neq -1 \\ \dfrac{7}{3} & x = -1 \end{cases}$ d). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x > 1 \\ -\sqrt{5-x} & x \le 1 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $f(x) = x^4 - x^2 + 2$. TXĐ: $D = R$

$\forall x_0 \in$ ¡ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(x^4 - x^2 + 2\right) = x_0^4 - x_0^2 + 2 = f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục trên R.

b) $f(x) = x^2.\sin x - 2\cos^2 x + 3$. TXĐ: $D = R$

$\forall x_0 \in$ ¡ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(x^2.\sin x - 2\cos^2 x + 3\right)$

$= x_0^2 \sin x_0 - 2\cos^2 x_0 + 3 = f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục trên R.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x \neq -1 \\ \dfrac{7}{3} & x = -1 \end{cases}$. Tập xác định của f(x) là $D =$ ¡

Nếu $x \neq -1$ thì $f(x) = \dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1}$ là hàm số phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ (1).

Bây giờ ta xét tính liên tục của f(x) tại $x_0 = -1$

Ta có: $f(x_0) = f(-1) = \dfrac{7}{3}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(2x^2-2x+3)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1} = \dfrac{7}{3}$

Vì $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x_0 = -1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số f(x) liên tục trên R.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x > 1 \\ -\sqrt{5-x} & x \le 1 \end{cases}$. Tập xác định của f(x) là $D =$ ¡

Với mọi $x_0 \in (1;+\infty)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = \dfrac{x_0^2-4x_0+3}{x_0-1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0 \in (-\infty;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(-\sqrt{5-x}\right) = -\sqrt{5-x_0} = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Ta xét tính liên tục của f(x) tại $x_0 = 1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-3) = -2.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\sqrt{5-x}\right) = -2.$

Và có $f(1) = -\sqrt{5-1} = 2$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại 1 (3)

Từ (1) (2) và (3) suy ra f(x) liên tục trên R.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 3 \\ ax+b & 3 < x < 5 \\ 7 & x \ge 5 \end{cases}$

Xác định a, b để hàm số liên tục trên R.

LỜI GIẢI

Ta có tập xác định của hàm số f(x) là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;3),(3;5),(5;+\infty)$ (vì là hàm đa thức).

Do đó hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại các điểm $x = 3$ và $x = 5$.

$+$ Tại $x = 3$:

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 1 = 1$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(ax+b) = 3a+b$ và $f(3) = 1$.

Do đó hàm liên tục tại $x = 3$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 3a+b = 1 \quad (1)$

$+$ Tại $x = 5$

Ta có $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 5a+b$ và $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 7 = f(5)$.

Do đó hàm số liên tục tại $x = 5$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = f(5) \Leftrightarrow 5a+b = 7 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi: $\begin{cases} 3a+b = 1 \\ 5a+b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \end{cases}$.

Vậy với $a = 3, b = -8$ thì hàm số liên tục trên R.