Câu 2: Tìm các giới hạn sau:

1). $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\tan x-\tan c}{x-c}$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$ 3). $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$ 5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ 6). $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

7). $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\tan(x+2)}$ 8). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{1-\cos x}$

9). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+2x)-2\tan(a+x)+\tan a}{x^2}$

LỜI GIẢI

1). $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\tan x-\tan c}{x-c}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\sin(x-c)}{x-c}\cdot\dfrac{1}{\cos x\cos c}=\dfrac{1}{\cos^2 c}$ (vì $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\sin(x-c)}{x-c}=1$).

2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}(1+\cos x+\cos^2 x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{3}{2}.$$

3). $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sin x-\sin a)(\sin x+\sin a)}{(x-a)(x+a)}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2.\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{\sin x+\sin a}{x+a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x+a}{2}(\sin x+\sin a)}{x+a}$$

$$=\frac{2\cos a.\sin a}{2a}=\frac{\sin 2a}{2a}.$$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin\frac{x(\alpha+\beta)}{2}\cdot\sin\frac{x(\alpha-\beta)}{2}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x(\alpha+\beta)}{2}}{\frac{x(\alpha+\beta)}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x(\alpha-\beta)}{2}}{\frac{x(\alpha-\beta)}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{(\alpha+\beta)}{2}\frac{(\alpha-\beta)}{2}(-2)=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}.$$

5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}(2\cos 4x)=2$

6). $L=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$. Đặt $t=x-1$, vì $x\to 1\Rightarrow t\to 0$

$$L=\lim_{t\to 0}(-t)\tan\frac{\pi}{2}(t+1)=\lim_{t\to 0}(-t)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to 0}t\cot\frac{\pi}{2}t$$

$$=\lim_{t\to 0}t.\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

7). $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\tan(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{\tan(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\tan(x+2)}(x^2-2x+4)=12$

(Vì $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\tan(x+2)}=1$).

8). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{1-\cos x}$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x.)\cos 2x.\cos 3x+(1-\cos 2x)\cos 3x+(1-\cos 3x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x.)\cos 2x.\cos 3x}{1-\cos x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)\cos 3x}{1-\cos x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos x}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x.\cos 3x+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x\cos 3x}{2\sin^2\frac{x}{2}}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos 3x}{\sin^2\frac{x}{2}}+\lim\limits_{x\to 0}9.\frac{\left(\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}=1+4+9=14$$

9). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-\sin(a+x)+\sin a-\sin(a+x)}{x^2}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}-2\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(a+\frac{3x}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4\sin\frac{x}{2}\sin(a+x)\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}(-1)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\sin(a+x)=-\sin a$$

10). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+2x)-2\tan(a+x)+\tan a}{x^2}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(a+2x)-\tan(a+x)-(\tan(a+x)-\tan a)}{x^2}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}-\dfrac{\sin x}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}\left(\frac{\cos a-\cos(a+2x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)\cos a}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}\left(\frac{2\sin x\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)\cos a}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{2\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)\cos a}\right) = \frac{2\sin a}{\cos^3 a}.$$