VẤN ĐỀ 2:
Tính tăng, giảm của dãy số.

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Xét dấu của biểu thức $u_{n+1}-u_n$

- Nếu $\forall n\in N^*, u_{n+1}-u_n>0$ thì (u_n) là dãy số tăng;
- Nếu $\forall n\in N^*, u_{n+1}-u_n<0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $\forall n\in N^*, u_n>0$ thì có thể so sánh $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ thì (u_n) là dãy số tăng;
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh $u_{n+1}>u_n$ (hoặc $u_{n+1}<u_n$)

Chú ý:

- Nếu $\exists k\in N^*: u_{k+1}>u_k$ thì dãy số (u_n) không giảm.
- Nếu $\exists k\in N^*: u_{k+1}<u_k$ thì dãy số (u_n) không tăng.

Ví dụ 1 : Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết:

a). $u_n=\frac{1}{n}-2$ b). $u_n=\frac{n-1}{n+1}$ c). $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$

d). $u_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$ e). $u_n=2n-\sqrt{4n^2-1}$

LỜI GIẢI

a). $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-2-\left(\frac{1}{n}-2\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}<0\quad \forall n\in ¥ ^*$

Kết luận dãy số (u_n) là dãy số giảm.

b). $u_n=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}$

Ta có $u_{n+1}-u_n=1-\frac{2}{n+2}-\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0\quad \forall n\in ¥ ^*$

Kết luận dãy số (u_n) là dãy số tăng.

c). $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$

Ta có $u_1=-3, u_2=5, u_3=-9$, từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy không tăng không giảm.

d). $u_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$. Dễ thấy $u_n>0\quad \forall n\in N^*$

Xét tỉ số: $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{3^n}{2^{n+1}}.\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}<1.\ \Rightarrow u_n<u_{n+1}$. Vậy (u_n) là một dãy số tăng.

e). $u_n=2n-\sqrt{4n^2-1}$

Ta có: $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 - 1} = \dfrac{4n^2 - \left(4n^2 - 1\right)}{2n + \sqrt{4n^2 - 1}} = \dfrac{1}{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}$

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2\left(n+1\right) + \sqrt{4\left(n+1\right)^2 - 1}} - \dfrac{1}{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}; \forall n \in N^*$

Vì: $2\left(n+1\right) + \sqrt{4\left(n+1\right)^2 - 1} > 2n + \sqrt{4n^2 - 1}; \forall n \in N^* \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\left(n+1\right) + \sqrt{4\left(n+1\right)^2 - 1}} - \frac{1}{2n + \sqrt{4n^2 - 1}} < 0; \forall n \in N^*$$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in N^*$. Vậy: dãy số $\left(u_n\right)$ giảm.

Ví dụ 2: Xét tính tăng giảm của các dãy số $\left(u_n\right)$ được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

a). $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \forall n \in N^* \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3 + u_n} \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \forall n \in N^* \end{cases}$

Vì $u_2 = \sqrt{2u_1 + 3} = \sqrt{7} > u_1$, ta dự đoán $u_{n+1} > u_n \left(*\right)$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có $\left(*\right)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử ta có: $u_k > u_{k-1}$. Khi đó ta có:

$u_{k+1} = \sqrt{2u_k + 3} > \sqrt{2u_{k-1} + 3} = u_k$ (do $u_k > u_{k-1}$)

Suy ra $\left(*\right)$ đúng với mọi $n \in N^*$, suy ra $\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.

b). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3 + u_n} \end{cases}$

Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in N^*$

Ta có: $u_2 = \dfrac{2u_1}{3 + u_1} = \dfrac{6}{6} = 1 < u_1$.

Ta dự đoán $u_{n+1} < u_n \left(**\right)$ với mọi $n \in N^*$.

Ta có $\left(**\right)$ đúng khi $n = 1$. Giả sử có $u_k < u_{k-1}$

Khi đó $u_{k+1} = \dfrac{2u_k}{3 + u_k} = \dfrac{2u_k + 6 - 6}{3 + u_k} = 2 - \dfrac{6}{u_k + 3}$.

Vì $u_k < u_{k-1}$ nên $\dfrac{6}{u_k + 3} > \dfrac{6}{u_{k-1} + 3} \Rightarrow u_{k+1} < 2 - \dfrac{6}{u_{k-1} + 3} = u_k$.

Suy ra $\left(**\right)$ đúng với mọi $n \in N^*$. Vậy $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

VẤN ĐỀ 3: Dãy số bị chặn.

PHƯƠNG PHÁP

1). Nếu $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ thì:

- Thu gọn u_n , dựa vào biểu thức thu gọn để chặn u_n.
- Ta cũng có thể chặn tổng $\sum_{k=1}^{n} a_k$ bằng một tổng mà ta có thể biết được chặn trên, chặn dưới của nó.

2). Nếu dãy số (u_n) ho bởi một hệ thức truy hồi thì:

- Dự đoán chặn trên, chặn dưới rồi chứng minh bằng phương pháp chứng minh quy nạp.
- Ta cũng có thể xét tính đơn điệu (nếu có) sau đó giải bất phương trình $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó chặn (u_n).

Ví dụ 1: Xét tính tăng hay giảm và bị chặn của dãy số : $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}; n \in N^*$

LỜI GIẢI

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+1}{n+4} - \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{2n^2+7n+3-2n^2-7n+4}{(n+4)(n+3)} = \dfrac{7}{(n+4)(n+3)} > 0; \forall n \in N^*$

Vậy: (u_n) là dãy số tăng.

Ta có $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \dfrac{7}{n+3}$, suy ra:

$\forall n \in ¥^*, u_n < 2$ nên (u_n) bị chặn trên. Vì (u_n) là dãy số tăng $\forall n \in ¥^*, u_1 = \dfrac{1}{4} \le u_n$ Nên (u_n) bị chặn dưới. Vậy (u_n) bị chặn.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + (n-1).2^n$

a). Viết 5 số hạng đầu của dãy số.

b). Tìm công thức truy hồi.

c). Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới.

LỜI GIẢI

a).Ta có:

$u_1 = 1 + (1-1).2^1 = 1$

$u_2 = 1 + (2-1).2^2 = 5$

$u_3 = 1 + (3-1).2^3 = 17$

$u_4 = 1 + (4-1).2^4 = 49$

$u_5 = 1 + (5-1).2^5 = 129$

b). Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = 1 + n.2^{n+1} - (1 + (n+1).2^n)$

$= 2n.2^n - (n-1).2^n = (2n-n+1).2^n = (n+1).2^n \Rightarrow u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n$.

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$

c). Ta có: $u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n > 0 \quad \forall n \ge 1$. Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $u_n = 1 + (n-1).2^n \ge 1 \quad \forall n \ge 1$. Kết luận (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 5u_n$ với mọi $n \ge 1$.

a). Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b). Chứng minh rằng $u_n = 2.5^{n-1}$ với mọi $n \ge 1$.

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$u_2 = 5u_1 = 5.2 = 10.$

$u_3 = 5.u_2 = 5.10 = 50.$

$u_4 = 5.u_3 = 5.50 = 250.$

$u_5 = 5.u_4 = 5.250 = 1250.$

$u_6 = 5.u_5 = 5.1250 = 6250.$

b). Ta sẽ chứng minh: $u_n = 2.5^{n-1}$ (1) với mọi $n \ge 1$, bằng phương pháp quy nạp

Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 2.5^0 = 2$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k\left(k \in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k = 2.5^{k-1}$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$.

Có nghĩa ta phải chứng minh: $u_{k+1} = 2.5^k$.

Từ hệ thức xác định dãy số : (u_n) và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = 5.u_k = 2.5^{k-1}.5 = 2.5^k$ (đpcm).

Câu 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 7$ với mọi $n \ge 1$

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng: $u_n = 7n - 6$ (1) với mọi $n \ge 1$

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$u_2 = u_1 + 7 = 1 + 7 = 8.$

$u_3 = u_2 + 7 = 8 + 7 = 15.$

$u_4 = u_3 + 7 = 15 + 7 = 22.$

$u_5 = u_4 + 7 = 22 + 7 = 29.$

$u_6 = u_5 + 7 = 29 + 7 = 36.$

b). Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 7.1 - 6 = 1$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k\left(k \in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k = 7k - 6$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 7(k+1) - 6.$

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = u_k + 7 = (7k - 6) + 7 = 7(k+1) - 6$ (đúng).