Chứng minh phương trình $x^3+x+1=0\quad(1)$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=x^3+x+1$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $f(-1)=-1$, và $f(0)=1$. Từ đó suy ra $f(-1)f(0)=-1<0$. Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

Kết luận phương trình (1) luôn có ít nhất 1 nghiệm âm lớn hơn -1.

Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c\,(c\neq 0)$ và $3a+4b+6c=0$. Chứng minh phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

LỜI GIẢI

$f(x)=ax^2+bx+c\,(c\neq 0)$

Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0)=c$ và $f(1)=a+b+c$

Theo đề bài có $3a+4b+6c=0\Rightarrow c=\dfrac{-3a-4b}{6}$

Ta có : $f(0)f(1)=c(a+b+c)=\dfrac{-3a-4b}{6}\left(a+b+\dfrac{-3a-4b}{6}\right)=-\dfrac{3a+4b}{6}\cdot\dfrac{3a+2b}{6}$

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$

a). Chứng minh $f(-1)f(2)<0$

b). Chứng minh phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1;2)$

LỜI GIẢI

a. Ta có $f(-1)=-1$ và $f(2)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(-1)f(2)<0$

b. Vì hàm số $f(x)$ không liên tục trên $(-1;2)$ $\Rightarrow f(x)$ không có nghiệm $n_0\in(-1;2)$

6. Chứng minh rằng phương trình $\cos^5 x+\cos x-1=0$ có nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $\cos x=t\,(-1\le t\le 1)$, phương trình đã cho trở thành $t^5+t-1=0\quad(*)$

Hàm số $f(t)=t^5+t-1$ liên tục trên R.

Ta có : $f(1)=1, f(-1)=-3.$

Do $f(1).f(-1)=-3<0$, suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc $(-1;1)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

7. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm:

a) $x^4-4x+1=0$ b) $2x^5+3x+3=0$ c) $x^4-4x^3-2=0$ d) $5x^3+10x+6=0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x)=x^4-4x+1$ thì $f(x)$ liên tục trên R và $f(0)=1;f(1)=-2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên R, có $f(0).f(1)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

b). Đặt $f(x)=2x^5+3x+3$ thì $f(x)$ liên tục trên R và $f(-1)=-2;f(0)=3$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên R, có $f(-1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$, suy ra phương trình có nghiệm.

c). Đặt $f(x)=x^4-4x^3-2$ thì $f(x)$ liên tục trên R và $f(-1)=3;f(0)=-2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên R, có $f(-1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

d). Đặt $f(x)=5x^3+10x+6$ thì $f(x)$ liên tục trên R và $f(-1)=-9;f(0)=6$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên R, có $f(-1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

10. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0;k>n>m>0$ và $km\le n^2$ thì phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0)=c;f\left(\frac{n}{k}\right)=a.\frac{n^2}{k^2}+b.\frac{n}{k}+c$

$\Rightarrow f(0).f\left(\frac{n}{k}\right)=c\left[\frac{n^2}{k}\left(\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}\right)+c\left(1-\frac{n^2}{km}\right)\right]=c^2\left(1-\frac{n^2}{km}\right)$ (do $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0$)

Vì $c^2\ge 0;n^2\ge km>0\Rightarrow\frac{n^2}{km}\ge 1$ do đó $f(0).f\left(\frac{n}{k}\right)=c^2\left(1-\frac{n^2}{km}\right)\le 0$

-Với $c=0$: phương trình đã cho (kí hiệu là phương trình (1) trở thành $ax^2+bx=0$

Suy ra $x=0$ hoặc $ax+b=0$. (2)

+Nếu $a=0$ thì từ $c=a=0$ và điều kiện $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0$ suy ra $b=0$. Khi đó phương trình (2) có nghiệm là $\forall x\in R$, suy ra phương trình (1) có nghiệm $x\in(0;1)$

+ Nếu $a\ne 0$ thì $b\ne 0$ (vì nếu $b=0,c=0$ thì từ điều kiện $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0$ suy ra $a=0$)

suy ra phương trình (2) có nghiệm $x=-\frac{b}{a}$

Khi đó từ điều kiện $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0;k>n>m>0$ và $c=0$ suy ra $x=-\frac{b}{a}=\frac{n}{k}\in(0;1)$

Do đó phương trình (1) có nghiệm $x\in(0;1)$

-Với $1-\frac{n^2}{km}=0\Rightarrow f\left(\frac{n}{k}\right)=0\Rightarrow\frac{n}{k}$ là nghiệm thuộc $(0;1)$.

- Với $c \neq 0$ và $1-\frac{n^2}{km} \neq 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{n}{k}\right) < 0 \Rightarrow f(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{n}{k}\right)$

Mà $\left(0;\frac{n}{k}\right) \subset (0;1)$ (vì $0 < \frac{n}{k} < 1$) nên phương trình (1) có nghiệm $x \in (0;1)$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.