BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

1). $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

2). $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

3). $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

4). $1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5). $1.2+2.5+3.8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$

6). $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

7). $1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, n\ge 2$

8). $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}, n\ge 2$

9). $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$

10). $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2^n-1}{2^n}$

11). $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4.3^n}$

LỜI GIẢI

1). $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}\quad(1)$

Với n = 1: Vế trái của (1) = 1, vế phải của (1) $=\dfrac{1(4.1-1)}{3}=1$. Vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\dfrac{k(4k^2-1)}{3}\quad(2)$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right]}{3}=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

Thật vậy $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\dfrac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)^2$ (thế (2) vào).

$$=\frac{k(2k+1)(2k-1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

∗ ***Chú ý :*** $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ *với* x_1,x_2 *là 2 nghiệm của phương trình* $ax^2+bx+c=0$.

Áp dụng : ta thấy $2k^2+5k+3=0$ *có 2 nghiệm là* $k=-1;k=-\frac{3}{2}$. *Do đó*

$$2k^2+5k+3=2(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)=(k+1)(2k+3)$$

2). $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 4, vế phải của (1) $=4$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2+(2k+2)^2=\frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$$

Thật vậy: $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2+(2k+2)^2=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}+(2k+2)^2$ (thay (2) vào).

$\frac{2(k+1)(2k^2+7k+6)}{3}=\frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

3). $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 1, vế phải của (1) $=1$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Thật vậy: $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

4). $1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 2, vế phải của (1) $=2$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Thật vậy: $1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$

$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

5). $1.2+2.5+3.8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 2, vế phải của (1) $=2$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1.2+2.5+3.8+\cdots+k(3k-1)=k^2(k+1)$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.2+2.5+3.8+\cdots+k(3k-1)+(k+1)(3k+2)=(k+1)^2(k+2)$

Thật vậy: $1.2+2.5+3.8+\cdots+k(3k-1)+(k+1)(3k+2)=k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)$

$(k+1)(k^2+3k+2)=(k+1)(k+1)(k+2)=(k+1)^2(k+2)$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

6). $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 6, vế phải của (1) $=6$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có:

$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ Thật vậy:

$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=$

$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

7). $1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, n\geq 2$ (1)

Với n = 2: Vế trái của (1) = 4, vế phải của (1) $=4$. Suy ra (1) đúng với n = 2.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có:

$1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(k-1)k^2=\frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(k-1)k^2+k(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)^2-1)(3(k+1)+2)}{12}$

$\Leftrightarrow 1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(k-1)k^2+k(k+1)^2=\frac{(k+1)(k^2+2k)(3k+5)}{12}$

Thật vậy: $1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(k-1)k^2+k(k+1)^2=\frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}+k(k+1)^2$

$=\frac{k(k+1)(3k^2+11k+10)}{12}=\frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}$

Vậy (1) đúng khi $n = k + 1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.