Ví dụ 2: Cho CSN $\left(u_n\right)$ có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1+u_5=51 \\ u_2+u_6=102 \end{cases}$

a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.
b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?
c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

LỜI GIẢI

a). Ta có $\begin{cases} u_1+u_5=51 \\ u_2+u_6=102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q^4=51 \\ u_1q+u_1q^5=102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4)=51 & (*) \\ u_1q(1+q^4)=102 & (**) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)}=\dfrac{102}{51} \Leftrightarrow q=2 \Rightarrow u_1=3$.

b). Có $S_n=3069 \Leftrightarrow u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=3069 \Leftrightarrow 3.\dfrac{1-2^n}{1-2}=3069 \Leftrightarrow 2^n=1024 \Rightarrow n=10$. Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.

c).Có $u_k=12288 \Leftrightarrow u_1.q^{k-1}=12288 \Leftrightarrow 3.2^{k-1}=12288 \Leftrightarrow 2^{k-1}=4096=2^{12}$
$\Rightarrow k-1=12 \Leftrightarrow k=13$. Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.

Ví dụ 3: Tính các tổng sau:

a). $S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n$

b). $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$

c). $S_n=\left(3+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(9+\dfrac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\dfrac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n=6+66+666+\cdots+\underbrace{666...6}_{n\ so\ 6}$

LỜI GIẢI

a). Ta có dãy số $2,2^2,2^3,\cdots,2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội $q=\dfrac{2^2}{2}=2$. Do đó $S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=2.\dfrac{1-2^n}{1-2}=2\left(2^n-1\right)$.

b). Ta có dãy số $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\dfrac{1}{2}$ và công bội

$q=\dfrac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$. Do đó $S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$.

c). $S_n=\left(3+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(9+\dfrac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\dfrac{1}{3^n}\right)^2$

$=3^2+2+\dfrac{1}{3^2}+3^4+2+\dfrac{1}{3^4}+\cdots+3^{2n}+2+\dfrac{1}{3^{2n}}$

$=\left(3^2+3^4+\cdots+3^{2n}\right)+\left(\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^4}+\cdots+\dfrac{1}{3^{2n}}\right)+\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{n}$

• Có dãy số $3^2, 3^4, \cdots, 3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 3^2$ và công bội $q = \frac{3^4}{3^2} = 9$.

Do đó $S_1 = u_1.\frac{1-q^n}{1-q} = 9.\frac{1-9^n}{1-9} = \frac{9}{8}\left(9^n - 1\right)$.

• Có dãy số $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^4}, \cdots, \frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3^2}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$. Do đó $S_1 = u_1.\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{9}.\frac{1-\frac{1}{9^n}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{9^n}\right) = \frac{9^n - 1}{8.9^n}$.

Vậy $S_n = \frac{9}{8}\left(9^n - 1\right) + \frac{9^n - 1}{8.9^n} + 2n = \frac{\left(9^n - 1\right)\left(9^{n+1} + 1\right)}{8.9^n} + 2n$.

d). $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{66...6}_{n\text{ so }6} = \frac{6}{9}\left(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99...9}_{n}\right)$

$= \frac{2}{3}\left[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots + (10^n - 1)\right]$

$= \frac{2}{3}\left[10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n - n\right] = \frac{2}{3}\left[10.\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right] = \frac{20}{27}\left(10^n - 1\right) - \frac{2n}{3}$.

DẠNG 3: Dựa vào tính chất của cấp số nhân, chứng minh đẳng thức:

Ví dụ : Cho a, b, c, d là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh:

a). $\left(ab + bc + ca\right)^3 = abc\left(a + b + c\right)^3$

b). $\left(a^2 + b^2\right)\left(b^2 + c^2\right) = \left(ab + bc\right)^2$

c). $\left(a + b + c\right)\left(a - b + c\right) = a^2 + b^2 + c^2$

d). $\left(b - c\right)^2 + \left(c - a\right)^2 + \left(d - b\right)^2 = \left(a - d\right)^2$

e). $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$

LỜI GIẢI

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên có $ac = b^2$.

a). Ta có $abc\left(a + b + c\right)^3 = b^3\left(a + b + c\right)^3 = \left(ab + b^2 + bc\right)^3 = \left(ab + bc + ca\right)^3$ (đpcm).

b). Ta có: $\left(a^2 + b^2\right)\left(b^2 + c^2\right) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2 = a^2b^2 + 2b^4 + b^2c^2$

$= a^2b^2 + 2ab.bc + b^2c^2 = \left(ab + bc\right)^2$ (đpcm).

c). Ta có $\left(a + b + c\right)\left(a - b + c\right) = \left[\left(a + c\right) + b\right]\left[\left(a + c\right) - b\right] = \left(a + c\right)^2 - b^2$

$= a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (đpcm).

d). Vì a, b, c, d lập thành CSN nên có: $a.d = bc, a.c = b^2, b.d = c^2$

Khai triển: $\left(b - c\right)^2 + \left(c - a\right)^2 + \left(d - b\right)^2 = a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 - 2bc - 2ca - 2bd$

$$\begin{aligned}&= a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 - 2ad - 2b^2 - 2c^2\\&= a^2 - 2ad + d^2\\&= (a-d)^2\end{aligned}$$

e). Có: $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$ (1). Ta có $ac=b^2 \Rightarrow \begin{cases} ac^3 = b^2c^2\\ a^3c = b^2a^2\\ a^2c^2 = b^4\end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{ac^3}{a}+\frac{b^4}{b}+\frac{a^3c}{c}=a^3+b^3+c^3$ (điều phải chứng minh).

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm u_1 và q, biết rằng:

1) $\begin{cases} u_2+u_3+u_4=\frac{35}{2}\\ u_1u_5=25\\ u_i>0\,(i=1,\dots,5)\end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65\\ u_1+u_7=325.\end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_2+u_4+u_6=-42\\ u_3+u_5=20\end{cases}$

4) $u_1+u_6=165; u_3+u_4=60.$ 5). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15\\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85.\end{cases}$

6) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13\\ u_4+u_5+u_6=351\end{cases}$ 7) $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5=0\\ u_1^3+u_3^3=189\end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_1u_2u_3=1728\\ u_1+u_2+u_3=63\end{cases}$

9). $\begin{cases} u_1+u_3=3\\ u_1^2+u_3^2=5\end{cases}$ 10). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=7\\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=21\end{cases}$

LỜI GIẢI

1). $\begin{cases} u_2+u_3+u_4=\frac{35}{2}\\ u_1u_5=25\\ u_i>0\,(i=1,,,5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q+u_1.q^2+u_1.q^3=\frac{35}{2} & (1)\\ u_1.u_1.q^4=25 & (2)\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow (u_1.q^2)=5^2 \Leftrightarrow u_1.q^2=5 \Rightarrow u_1=\frac{5}{q^2}$ thay vào (1) được:

$\frac{5}{q^2}(q+q^2+q^3)=\frac{35}{2}\Leftrightarrow 2(1+q+q^2)=79\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow q=2 \ \vee \ q=\frac{1}{2}.$

Với $q=2\Rightarrow u_1=\frac{5}{4}$. Với $q=\frac{1}{2}\Rightarrow u_1=20.$

2). $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65\\ u_1+u_7=325.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1q^2+u_1q^4=65\\ u_1+u_1q^6=325.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1-q^2+q^4)=65 & (1)\\ u_1(1+q^6)=325 & (2)\end{cases}$

Lấy: $\frac{(2)}{(1)}\Leftrightarrow \frac{1+q^6}{1-q^2+q^4}=\frac{325}{65}\Leftrightarrow \frac{(1+q^2)(1-q^2+q^4)}{1-q^2+q^4}=5$ $\left(\text{vì } 1+q^6=1+(q^2)^3\right)$

$\Leftrightarrow 1+q^2=5\Leftrightarrow q^2=4\Leftrightarrow q=\pm 2.$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{65}{1 - 2^2 + 2^4} = 5$. Với $q = -2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{65}{1 - (-2)^2 + (-2)^4} = 5$.